



وب سایت تخصصی مهندسی برق قدرت

فصل اول

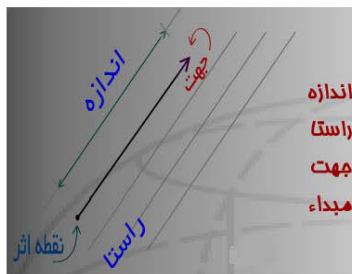
ریاضیات برداری

بردارها و اسکالرها

اصولاً کمیت‌های فیزیکی از نظر معرفی و معین شدن در دو دسته قرار می‌گیرند: اسکالر و بردار

اسکالر Scalar: به کمیت‌هایی اطلاق می‌شوند که تنها توسط یک عدد که همان اندازه آن کمیت باشد مشخص می‌شوند مانند جرم، انرژی و بار الکتریکی

بردار vector: کمیت‌هایی هستند که برای مشخص شدن آنان علاوه بر اندازه، به جهت نیز نیازمند هستند مانند نیرو، شدت میدان الکتریکی و چگالی جریان حجمی الکتریکی منظور از جهت در این کلام، معلوم بودن راستا یا محمل بردار، جهت و سمت بردار بر روی این راستا می‌باشد. مانند شکل روبرو.



شکل ۱

عموماً بمنظور تفکیک نمودن کمیت‌های اسکالر و برداری از یکدیگر بصورت پارامتری و نمادی بطریق زیر عمل می‌شود: کمیت‌های اسکالر با حروف کوچک و کمیت‌های برداری با حروف بزرگ توأم با علائمی در بالای آنها مانند:

اسکالر	$a, b, c, m, n, \dots$
بردار	$\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}, \vec{F}, A, B, E$

برای نمایش اندازه یک بردار یا حرف مربوطه را بدون علائم بردار بکار می‌رود و یا از علامت قدر مطلق مانند:

$$\vec{F} \text{ اندازه بردار } = F = |\vec{F}|$$

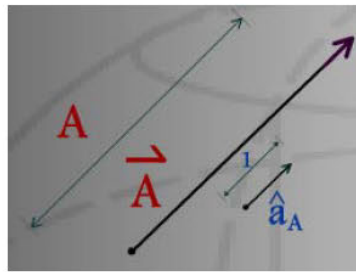
بردار یکان: unit vector

بردار واحد یا بردار یکان یک بردار عبارتست از برداری با اندازه واحد و همجهت با بردار مربوطه برای نمایش این بردار عموماً از حروف a, u همراه با علامت $\hat{}$ بر روی آن استفاده می‌شود. همچنین برای مشخص‌تر شدن آن از یک اندیس مشابه با اسم بردار اصلی به همراه حروف u و a نیز استفاده بعمل می‌آید

$$\vec{A} \text{ بردار واحد } = \hat{u}_A = \hat{a}_A$$

$$\hat{a}_A = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

بنابراین



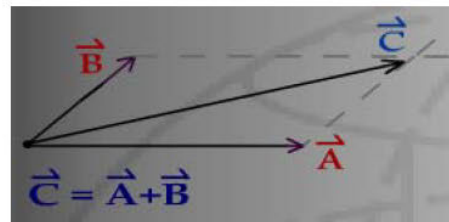
شکل ۲

جبر بردارها vector Algebra

چهار عمل اصلی در ریاضیات برداری بصورت زیر تعریف می‌شوند:

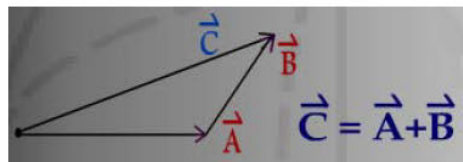
- جمع بردارها:

از نظر گرافیکی (هندسی) جمع چند بردار به دو روش انجام می‌گیرد: روش اول تشکیل متوازی‌الاضلاع است.

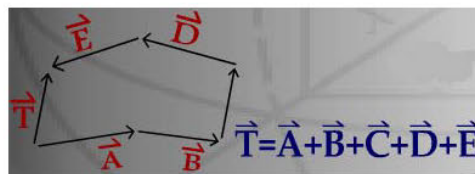


شکل ۳

روش دوم روش چند ضلعی یا روش سرپه‌دم است.



شکل ۴



شکل ۵

از نظر تحلیلی جمع دو بردار پس از تجزیه آن‌ها به مؤلفه‌های هم جهت، می‌توان با جمع جبری مؤلفه‌های هم جهت دو بردار عمل جمع را انجام داد.

$$\vec{A} + \vec{B} = ?$$

$$\vec{A} = A_1 \hat{a}_1 + A_2 \hat{a}_2 + A_3 \hat{a}_3$$

$$\vec{B} = B_1 \hat{a}_1 + B_2 \hat{a}_2 + B_3 \hat{a}_3$$

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_1 + B_1) \hat{a}_1 + (A_2 + B_2) \hat{a}_2 + (A_3 + B_3) \hat{a}_3$$

در جمع بردارها خاصیت جابجائی و شرکت پذیری صادق هستند.

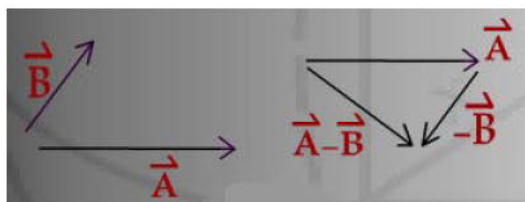
$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$

$$\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$$

- تفریق بردارها

در این عمل بردار $\vec{A}$ را با معکوس شده بردار $\vec{B}$ جمع می شود

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$



شکل ۶

ضرب بردارها

الف- ضرب دو بردار:

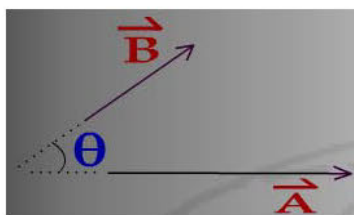
۱ - ضرب داخلی دو بردار

نتیجه ضرب داخلی دو بردار یک اسکالر می باشد، مانند:

$$C = \vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$$

[θ کوچکترین زاویه بین دو بردار است]

بهمین دلیل این نوع ضرب را ضرب اسکالر نیز گفته می شود. همچنین چون در نمایش این ضرب از علامت نقطه بعنوان عملیات ضرب استفاده می شود، به آن ضرب نقطه ای نیز گفته شده است. Scalar product , Dot product



شکل ۷

از خواص این نوع ضرب جابجایی و توزیع پذیری است.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{B}) + (\vec{A} \cdot \vec{C})$$

مهمترین کاربرد این ضرب یافتن مؤلفه یا تصویر یک بردار در جهت (راستا) خاصی است: کافی است بردار واحد آن جهت خاص را در بردار مذکور ضرب داخلی کرد.

مثال:

$$\vec{A} = A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z$$

با توجه به عمود بودن بردارهای واحد سه جهت x, y, z بر هم داریم:

$$\vec{A} \cdot \hat{a}_x = A_x \hat{a}_x \cdot \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y \cdot \hat{a}_x + A_z \hat{a}_z \cdot \hat{a}_x = (A_x \times 1) + (A_y \times 0) + (A_z \times 0) = A_x$$

$$A_y = \hat{a}_y \cdot \vec{A}, \quad A_z = \hat{a}_z \cdot \vec{A}$$

همچنین:

و یا بطور کلی: مؤلفه بردار $\vec{A}$ در جهت و راستای بردار $\vec{B}$: $A_B = \hat{a}_B \cdot \vec{A}$
 بنابراین واضح است که: $A^2 = \vec{A} \cdot \vec{A} = |\vec{A}| |\vec{A}| \cos 0^\circ$

۲- ضرب خارجی

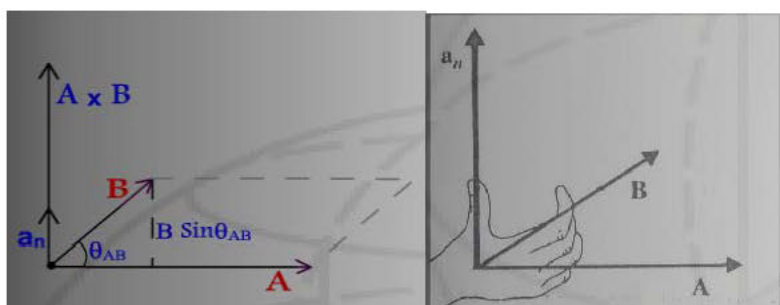
نتیجه این ضرب یک بردار است و چون در نمایش آن از علامت کراس $\times$ استفاده می‌شود به آن ضرب کراس نیز گفته می‌شود Cross product

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

$$C = |\vec{C}| = AB \sin \theta_{AB}$$

θ_{AB} کوچکترین زاویه بین $\vec{A}$ و $\vec{B}$ است که بردار $\vec{A}$ را در امتداد بردار $\vec{B}$ قرار می‌دهد.

جهت بردار $\vec{C}$ بر دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ عمود است و طبق قانون دست راست بدست می‌آید.



شکل ۸

واضح است که:

$$\vec{B} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{A} \times \vec{B}$$

همچنین خاصیت توزیع پذیری در ضرب خارجی وجود دارد:

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) + (\vec{A} \times \vec{C})$$

ب- ضرب یک اسکالر در یک بردار

این ضرب بصورت روبرو نمایش داده می‌شود: $m\vec{A} = mA\hat{a}_A$

نتیجه این ضرب بردار است با اندازه m برابر $\vec{A}$ و چنانچه m مثبت باشد بردار نهایی هم جهت و در غیر اینصورت در خلاف جهت بردار $\vec{A}$ خواهد بود.

تقسیم: نها تعریفی که در مورد تقسیم در مبحث بردارها وجود دارد تقسیم یک بردار بر یک

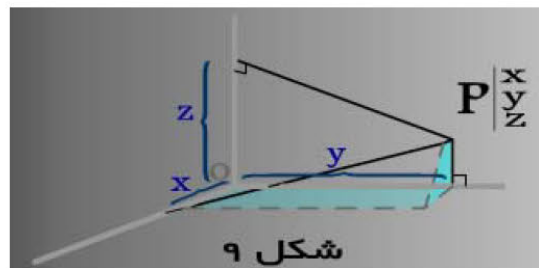
اسکالر است که همان مفهوم ضرب یک اسکالر در بردار را دارد: $\frac{\vec{A}}{m} = \frac{1}{m} \vec{A} = \frac{A}{m} \hat{a}_A$

دستگاه‌های مختصات متعامد Orthogonal coordinate systems

در این درس سه دستگاه مختصات سه بعدی که سه جهت آن بر هم عمود هستند را مورد بررسی و استفاده قرار می‌گیرد.

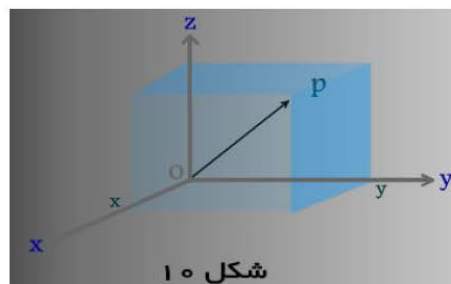
۱ - دستگاه مختصات مستطیلی Rectangular coordinates

بدلیل آنکه با تشکیل یک مکعب مستطیل می‌توان این دستگاه را برپا کرده و موقعیت نقطه یا مکانی را مشخص نمود، مختصات مستطیلی به آن اطلاق می‌شود. از دیگر نام‌های این دستگاه دکارتی و کارتزین Cartesian است.



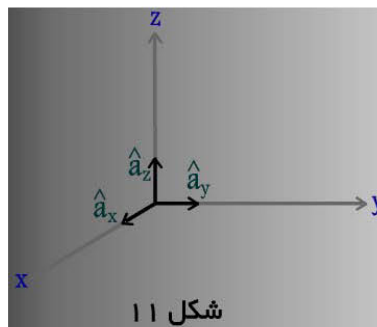
شکل ۹

در این دستگاه با سه پارامتر x و y و z موقعیت یک نقطه روشن می‌گردد. سه محور مربوطه در نقطه مبدأ مختصات بر هم عموداند. بنابراین برای یافتن مکان هر نقطه و یا انتهای هر بردار کافی است که از آن نقطه بر سه محور عمود کرد. بعنوان مثال نقطه P را در تصویر مشاهده می‌کنید. در واقع این خطوط عمود، قطره‌های سه وجه از یک مکعب مستطیل است که مبدأ مختصات (O) و نقطه P در ابتدا و انتهای قطر اصلی (بزرگ) آن واقع شده است.



شکل ۱۰

بردارهای یکان سه جهت عبارتند از $\hat{a}_x, \hat{a}_y, \hat{a}_z$ و هر کدام با اندازه واحد و در جهت مثبت سه محور x, y, z و منطبق با سه محور فوق خواهند بود. که بنابراین بر هم عمودند. پس:



شکل ۱۱

$$\hat{a}_x \cdot \hat{a}_x = \hat{a}_y \cdot \hat{a}_y = \hat{a}_z \cdot \hat{a}_z = 1 \times 1 \times \cos 0 = 1$$

$$\hat{a}_x \cdot \hat{a}_y = \hat{a}_x \cdot \hat{a}_z = \hat{a}_y \cdot \hat{a}_z = 1 \times 1 \times \cos 90 = 0$$

$$\hat{a}_x \times \hat{a}_x = \hat{a}_y \times \hat{a}_y = \hat{a}_z \times \hat{a}_z = 0$$

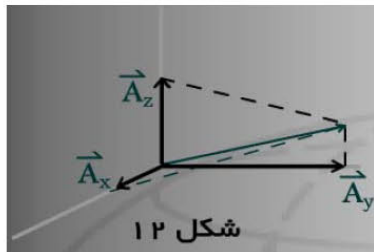
$$\hat{a}_x \times \hat{a}_y = \hat{a}_z, \quad \hat{a}_y \times \hat{a}_z = \hat{a}_x, \quad \hat{a}_z \times \hat{a}_x = \hat{a}_y$$

نمایش یک بردار در فضای مختصات مسطیلی بصورت تحلیلی:

$$\vec{A} = A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z$$

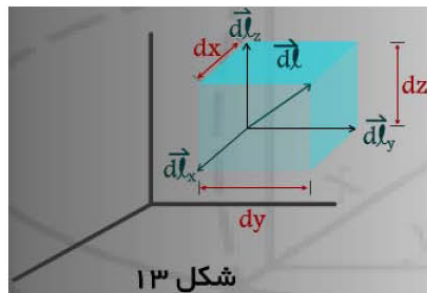
A_x, A_y, A_z بترتیب مؤلفه (تصویر) بردار $\vec{A}$ در سه جهت x و y و z می‌باشند.

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$



شکل ۱۲

برای یک شکل کوچک دیفرانسیلی با ابعاد d_x, d_y, d_z می‌توان بردار دیفرانسیلی طولی بقرار زیر تعریف نمود.



شکل ۱۳

$$d\vec{l} = d\vec{l}_x + d\vec{l}_y + d\vec{l}_z$$

$$d\vec{l}_x = dx\hat{a}_x, \quad dl_x = dx$$

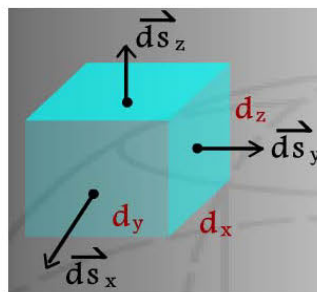
$$d\vec{l}_y = dy\hat{a}_y, \quad dl_y = dy$$

$$d\vec{l}_z = dz\hat{a}_z, \quad dl_z = dz$$

$$d\vec{l} = dx\hat{a}_x + dy\hat{a}_y + dz\hat{a}_z$$

بنابراین:

با تعریف بردار نرمال (عمود) بر یک سطح که عبارتست از برداری که بر سطح مورد نظر عمود بوده در جهت خارج از سطح است و اندازه آن برابر مساحت آن سطح می‌باشد، می‌توان سه بردار نرمال به سطح با توجه به شکل دیفرانسیلی قبل ارائه کرد.



شکل ۱۴

$$d\vec{s} = d\vec{s}_x + d\vec{s}_y + d\vec{s}_z$$

$$d\vec{s} = \hat{a}_x dydz, \quad ds_x = dydz$$

$$d\vec{s}_y = \hat{a}_y dxdz, \quad ds_y = dxdz$$

$$d\vec{s}_z = \hat{a}_z dxdy, \quad ds_z = dxdy$$

$$d\vec{s} = \hat{a}_x dydz + \hat{a}_y dxdz + \hat{a}_z dxdy$$

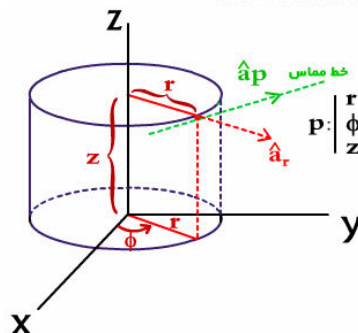
بنابراین:

آخرین ترم دیفرانسیلی یک کمیت اسکالر است دیفرانسیل حجم می‌باشد: $dv = dxdydz$

برای مقادیر ثابت x یا y یا z ، مکان‌های هندسی بوجود می‌آید که متشکل از صفحات مسطح و بینهایت عمود بر سه محور x, y, z خواهد بود.

۲- دستگاه مختصات استوانه‌ای Cylindrical coordinates

این دستگاه مختصات سه بعدی بطریقی تعریف می‌شود که با برپائی یک شکل استوانه‌ای سه پارامتر نشان دهنده موقعیت یک نقطه را براحتی میسر می‌کند و بهمین دلیل نام استوانه‌ای به این دستگاه اتلاق شده است.



شکل ۱۵

سه پارامتر این دستگاه z, ϕ, r است.

r فاصله عمودی از محور z هاست.

ϕ زاویه‌ای است که تصویر r بر روی صفحه افقی (xy) با جهت مثبت محور x می‌سازد.

z همان کمیت (پارامتر) سوم مختصات مستطیلی است.

بنابراین می‌توان استوانه‌ای تصور و رسم نمود که شعاع قاعده آن r محور استوانه محور z ها قاعده بالایی آن در موقعیت $z=z$ قاعده پائین استوانه در سطح افقی واقع شده است و نقطه P روی لبه آن استوانه مستقر می‌شود (ارتفاع استوانه برابر با z با پارامتر سوم مختصات نقطه P می‌باشد) محدوده z, ϕ, r به توجه به تعریف انجام شده:

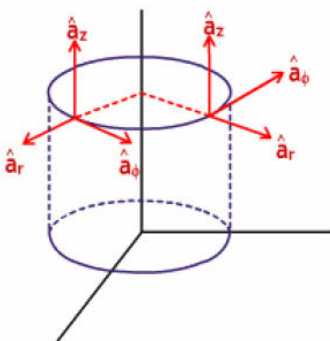
$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty$$

برای یافتن بردارهای واحد سه جهت مربوطه یعنی بترتیب $\hat{a}_r, \hat{a}_\phi, \hat{a}_z$ کافی است در نقطه P در امتداد شعاع r در جهت دور شدن از محور z به اندازه واحد، بردار $\hat{a}_r$ را بدست آورید.

اگر بر سطح استوانه و در نقطه P مماسی رسم گردد، امتداد این مماس راستای $\hat{a}_\phi$ خواهد

بود و جهت مثبت آن در جهت دور شدن از جهت مثبت محور x هاست. بنابراین واضح است که $\hat{a}_r, \hat{a}_\phi$ بر خلاف بردارهای واحد مختصات مستطیلی وابسته به مکان خواهند بود.

$\hat{a}_z$ مشابه دستگاه مختصات مستطیلی تعریف می‌شود.



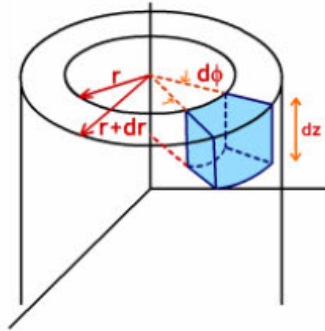
شکل ۱۶

مشابه مختصات مستطیلی در این مختصات داریم:

$$\vec{A} = A_r \hat{a}_r + A_\phi \hat{a}_\phi + A_z \hat{a}_z$$

$$A = \sqrt{A_r^2 + A_\phi^2 + A_z^2}$$

برای تعریف بردارهای دیفرانسیلی طولی و سطحی بایستی قسمتی از فضای بین دو استوانه هم محور با اختلاف شعاع برابر با dr را در نظر گرفت این حجم دیفرانسیلی که دارای ارتفاعی برابر با dz است در دهانه $d\phi$ واقع می‌شود.



شکل ۱۷

بنابراین بردار دیفرانسیل طولی:

$$d\vec{l} = d\vec{l}_r + d\vec{l}_\phi + d\vec{l}_z$$

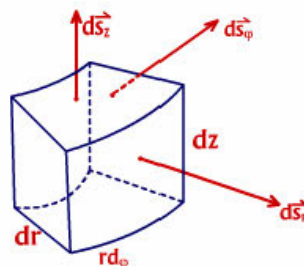
$$d\vec{l}_r = dr \hat{a}_r, \quad dl_r = dr$$

$$d\vec{l}_\phi = r d\phi \hat{a}_\phi, \quad dl_\phi = r d\phi$$

$$d\vec{l}_z = dz \hat{a}_z, \quad dl_z = dz$$

توجه داریم که چون $d\phi$ اندازه یک زاویه (برحسب رادیان) است نمی‌تواند بعنوان طول در نظر گرفته شود. بنابراین با توجه به کمان روبرو به زاویه $d\phi$ از شعاع دایره r آنرا به طول تبدیل کرده‌ایم.

بردارهای دیفرانسیلی سطحی



شکل ۱۸

$$d\vec{S} = d\vec{S}_r + d\vec{S}_\phi + d\vec{S}_z$$

$$d\vec{S}_r = \hat{a}_r r d\phi dz, \quad dS_r = r d\phi \times dz$$

$$d\vec{S}_\phi = \hat{a}_\phi dr dz, \quad dS_\phi = dr \times dz$$

$$d\vec{S}_z = \hat{a}_z r dr d\phi, \quad dS_z = r d\phi \times dr$$

برای کمیت اسکالر دیفرانسیلی حجم در این مختصات $dv = r dr d\varphi dz$ که از ضرب سه بعد شکل دیفرانسیلی فوق یعنی dr و $r d\varphi$ و dz بدست آمده است.

همچنین در خصوص ضرب داخلی و ضرب خارجی بردارهای یکان این دستگاه با توجه به متعامد بودن سه جهت:

$$\hat{a}_r \cdot \hat{a}_r = \hat{a}_\varphi \cdot \hat{a}_\varphi = \hat{a}_z \cdot \hat{a}_z = 1$$

$$\hat{a}_r \cdot \hat{a}_\varphi = \hat{a}_r \cdot \hat{a}_z = \hat{a}_\varphi \cdot \hat{a}_z = 0$$

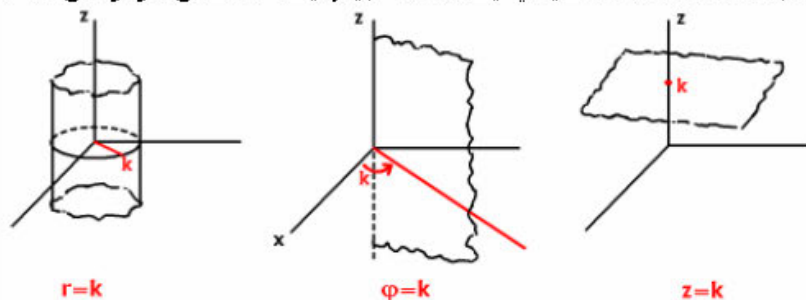
$$\hat{a}_r \times \hat{a}_\varphi = \hat{a}_z, \quad \hat{a}_\varphi \times \hat{a}_z = \hat{a}_r, \quad \hat{a}_z \times \hat{a}_r = \hat{a}_\varphi$$

در این مختصات برای پارامترهای ثابت مکان هندسی خاصی را حاصل می‌کند که بقرار زیر است:

برای $r=k$: سطح جانبی یک استوانه نامحدود با محوریت محور z ها خواهد بود که شعاع قاعده آن k می‌باشد.

برای $\varphi=k$: یک نیم صفحه بینهایت، مسطح و محدود به محور z هاست که در زاویه $\varphi=k$ قرار گرفته است.

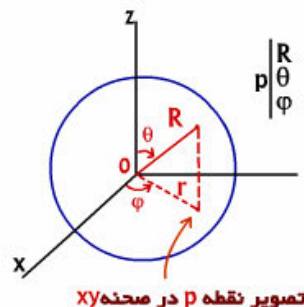
برای $z=k$: مشابه مختصات مستطیلی یک صفحه بینهایت، مسطح در ارتفاع $z=k$ خواهد بود.



شکل ۱۹

۲ - دستگاه مختصات گوی Spherical coordinates

این دستگاه در فضای سه بعدی دارای سه پارامتر R, θ, φ است و چون با مرور کردن یک کره به شعاع R بمرکز مبدأ مختصات از نقطه مورد نظری که می‌خواهیم مختصات آنرا نمایش دهیم تعریف می‌شود بنابراین بنام مختصات گوی موسوم است.



R فاصله نقطه تا مبدأ مختصات است.

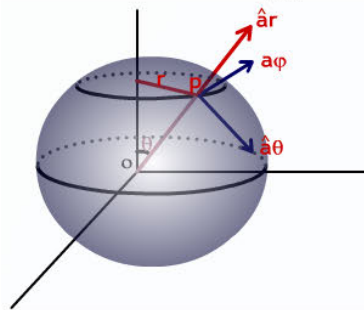
θ زاویه بین R و جهت مثبت محور z هاست.

و φ همان تعریف در مختصات استوانه‌ای را داراست یعنی از تصویر کردن R در صفحه xy به r رسیده زاویه بین r و جهت مثبت محور x ها زاویه φ خواهد بود.

بنابراین طبق تعاریف انجام شده محدوده سه پارامتر این مختصات عبارتند از:

$$0 \leq R < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

بردارهای واحد سه جهت تعریف شده بصورت زیر بدست می‌آیند که بر هم عمودند. چنانچه مرکز 0 را به نقطه P متصل نمود ادامه دهیم، امتداد $\hat{a}_R$ بدست آمده و جهت آن در جهت دور شدن از مرکز خواهد بود. حال اگر بر این امتداد عمودی رسم نمائیم که بر کره به شعاع R مماس بوده و در صفحه‌ای که شامل محور z و خط R باشد، واقع گردد امتداد $\hat{a}_\theta$ می‌دهد و جهت مثبت آن در جهت دور شدن از محور +Z است. چنانچه بر سطح کره به شعاع R در نقطه P مماسی بموازات صفحه افق رسم شود $\hat{a}_\varphi$ را بدست می‌آوریم که جهت مثبت آن در جهت دور شدن از قسمت مثبت محور X هاست.



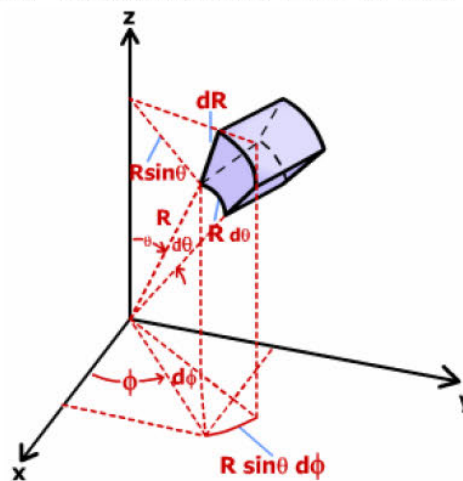
شکل ۲۰

ملاحظه می‌شود که در این دستگاه مختصات هر سه بردار واحد وابسته به مکان خواهد بود یعنی با تغییر نقطه P و یا انتهای هر بردار در این دستگاه بردارهای $\hat{a}_R, \hat{a}_\theta, \hat{a}_\varphi$ ممکن است تغییر بنمایند. برای یک بردار مانند بردار $\vec{A}$

$$\vec{A} = A_R \hat{a}_R + A_\theta \hat{a}_\theta + A_\varphi \hat{a}_\varphi$$

$$A = \sqrt{A_R^2 + A_\theta^2 + A_\varphi^2}$$

بردارهای دیفرانسیلی طولی و سطحی را می‌توان از حجم دیفرانسیلی که محصور بین دو کره هم مرکز با شعاع‌های R و R+dR است و محدود در زوایای $d\varphi, d\theta$ می‌باشد بدست آورد.



شکل ۲۱

بنابراین بردار دیفرانسیلی طولی

$$d\vec{l} = d\vec{l}_R + d\vec{l}_\theta + d\vec{l}_\varphi$$

$$d\vec{l}_R = \hat{a}_R dR, \quad dl_R = dR$$

$$d\vec{l}_\theta = \hat{a}_\theta R d\theta, \quad dl_\theta = R d\theta$$

$$d\vec{l}_\varphi = \hat{a}_\varphi R \sin \theta d\varphi, \quad dl_\varphi = R \sin \theta d\varphi$$

همچنین بردار دیفرانسیلی نرمال به سطح:

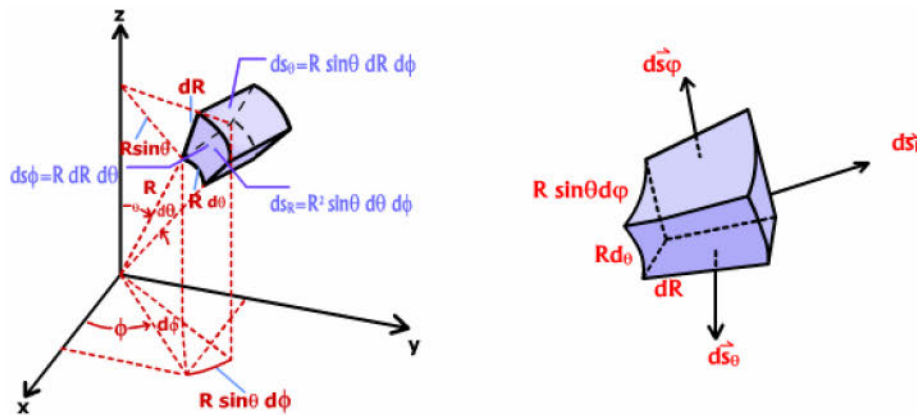
$$d\vec{s} = d\vec{s}_R + d\vec{s}_\theta + d\vec{s}_\varphi$$

$$d\vec{s}_R = \hat{a}_R R^2 \sin \theta d\theta d\varphi, \quad ds_R = R \sin \theta d\varphi \times R d\theta$$

$$d\vec{s}_\theta = \hat{a}_\theta R \sin \theta dR d\varphi, \quad ds_\theta = R \sin \theta d\varphi \times dR$$

$$d\vec{s}_\varphi = \hat{a}_\varphi R dR d\theta, \quad ds_\varphi = R d\theta \times dR$$

برای کمیت اسکالر دیفرانسیلی حجم $dv = R^2 \sin \theta dR d\theta d\varphi$ که از حاصل ضرب سه بعد $R \sin \theta d\varphi, R d\theta, dR$ حاصل شده است.



شکل ۲۲

در این مختصات نیز ضربهای داخلی و خارجی بردارهای واحد سه جهت عمود بر هم بصورت زیر بدست می‌آیند.

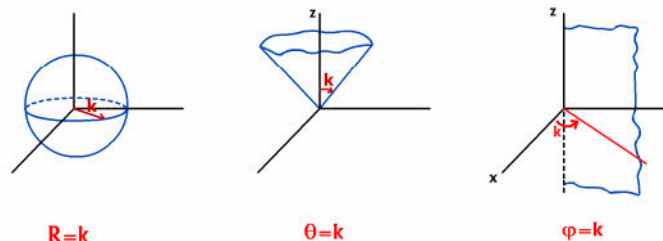
$$\hat{a}_R \cdot \hat{a}_R = \hat{a}_\theta \cdot \hat{a}_\theta = \hat{a}_\varphi \cdot \hat{a}_\varphi = 1$$

$$\hat{a}_R \cdot \hat{a}_\theta = \hat{a}_R \cdot \hat{a}_\varphi = \hat{a}_\theta \cdot \hat{a}_\varphi = 0$$

$$\hat{a}_R \times \hat{a}_\theta = \hat{a}_\varphi, \quad \hat{a}_\theta \times \hat{a}_\varphi = \hat{a}_R, \quad \hat{a}_\varphi \times \hat{a}_R = \hat{a}_\theta$$

مکان هندسی پارامترهای ثابت در این دستگاه مختصات طبق تعاریف قبلی بصورت زیر بدست می‌آیند.

برای $R=k$ کره‌ای خواهد بود به شعاع k بمرکز مبدأ مختصات
برای $\theta=k$ مخروط وارونی با زاویه رأس K واقع در مبدأ مختصات که دارای ابعاد بینهایت است.
برای $\varphi=k$ مشابه مختصات استوانه‌ای، نیم صفحه بینهایت و محدود به محور Z هاست که در زاویه $\varphi=k$ قرار گرفته است.



شکل ۲۳

تبدیل مختصات مستطیلی، استوانه‌ای و کروی به یکدیگر

گاهی اوقات بایستی مختصات نقطه‌ای که در دستگاه مختصات نمایش داده شده است در دستگاه دیگری بیان شود و یا نمایش تحلیلی بردار را در مختصات دیگری ارائه شود که عمده‌ترین علت جمع و یا ترکیب دو برداری است که در دستگاه مختصاتی ارائه شده‌اند که بردارهای واحد آنها تابع مکان هستند یعنی:

بنابراین نیازمند تبدیل پارامترها و مؤلفه‌های مختلف در یک دستگاه به دستگاه دیگر است.

تبدیل مختصات استوانه‌ای به مستطیلی و برعکس

تبدیل متغیر یا پارامترهای مختصات استوانه‌ای به مستطیلی:

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$z = z$$

برعکس:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$z = z$$

$$\vec{A} = A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z$$

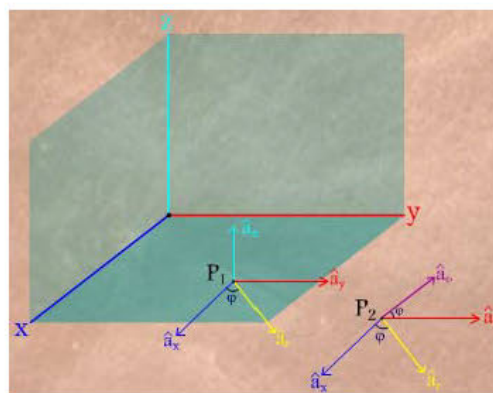
اگر

برای رسیدن به نمایش این بردار در مختصات استوانه‌ای باید A_x, A_y, A_z را بدست آورد.

$$A_x = \hat{a}_x \cdot \vec{A}, \quad A_y = \hat{a}_y \cdot \vec{A}, \quad A_z = \hat{a}_z \cdot \vec{A} \quad \text{بنابراین:}$$

$$A_x = \hat{a}_x \cdot (A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z)$$

$$= A_x \hat{a}_x \cdot \hat{a}_x + A_y \hat{a}_x \cdot \hat{a}_y + A_z \hat{a}_x \cdot \hat{a}_z$$



$$\hat{a}_x \cdot \hat{a}_x = 1 \times 1 \times \cos 0$$

$$\hat{a}_x \cdot \hat{a}_y = \cos(90 - \varphi) = \sin \varphi$$

$$\hat{a}_x \cdot \hat{a}_z = 0$$

$$\hat{a}_y \cdot \hat{a}_x = \cos(90 + \varphi) = -\sin \varphi$$

$$\hat{a}_y \cdot \hat{a}_y = \cos 0$$

$$\hat{a}_y \cdot \hat{a}_z = 0$$

$$\hat{a}_z \cdot \hat{a}_x = \hat{a}_z \cdot \hat{a}_y = 0, \quad \hat{a}_z \cdot \hat{a}_z = 1$$

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

ماتریس تبدیل مختصات مستطیلی به استوانه‌ای:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix}$$

و برعکس: ماتریس تبدیل مختصات استوانه‌ای به مستطیلی:

مثال: مطلوبست نمایش بردار $\vec{A}$ در مختصات مستطیلی:

$$\vec{A} = \hat{a}_r 3 \cos \varphi - \hat{a}_\varphi 2r + \hat{a}_z 5$$

$$A_r = 3 \cos \varphi, \quad A_\varphi = -2r, \quad A_z = 5$$

بنابراین

روش اول:

$$\begin{aligned} A_x &= \hat{a}_x \cdot \vec{A} = \hat{a}_x \cdot (\hat{a}_r 3 \cos \varphi - \hat{a}_\varphi 2r + \hat{a}_z 5) \\ &= \hat{a}_x \cdot \hat{a}_r 3 \cos \varphi - \hat{a}_x \cdot \hat{a}_\varphi 2r + \hat{a}_x \cdot \hat{a}_z 5 \\ &= \cos \varphi \times 3 \cos \varphi - (-\sin \varphi) 2r + 0 = 3 \cos^2 \varphi + 2r \sin \varphi \end{aligned}$$

$$A_y = \hat{a}_y \cdot \vec{A} = 3 \sin \varphi \cos \varphi - 2r \cos \varphi$$

$$A_z = \hat{a}_z \cdot \vec{A} = 5$$

سپس پارامترهای موجود در مؤلفه‌های بدست آمده را به مختصات مستطیلی تبدیل می‌کنیم:

$$A_x = 3 \frac{x^2}{x^2 + y^2} + 2y, \quad A_y = 3 \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \times \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 2x = \frac{3xy}{x^2 + y^2} - 2x$$

$$\vec{A} = \hat{a}_x \left(\frac{3x^2}{x^2 + y^2} + 2y \right) + \hat{a}_y \left(\frac{3xy}{x^2 + y^2} - 2x \right) + \hat{a}_z 5$$

بنابراین:

روش دوم:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \cos \varphi \\ -2r \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cos^2 \varphi + 2r \sin \varphi \\ 3 \sin \varphi \cos \varphi - 2r \cos \varphi \\ 5 \end{bmatrix}$$

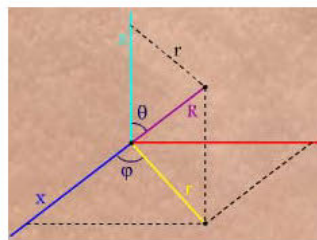
استفاده از ضرب ماتریسی:

که همان نتیجه روش قبل است.

تمرین: مطلوبست نمایش بردار مکان $\vec{R} = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای

-تبدیل متغیرهای مختصات کروی به مستطیلی و برعکس

تبدیل متغیرهای مختصات کروی به مستطیلی



$$x = R \sin \theta \cos \theta$$

$$y = R \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = R \cos \theta$$

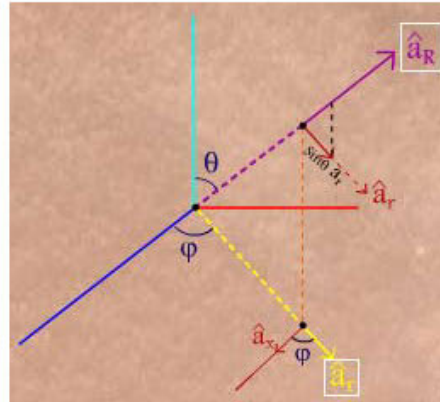
برعکس:

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

با توجه به شکل



$$\hat{a}_z \cdot \hat{a}_x = \cos(90 - \theta) \hat{a}_r \cdot \hat{a}_x = \sin \theta \times \cos \varphi$$

ماتریس تبدیل مختصات مستطیلی به کروی:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

و برعکس: ماتریس تبدیل مختصات کروی به مستطیلی:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

مثال:

بردار مکان يك نقطه كلي در مختصات کروي را بدست آورید:

$$\vec{A} = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z$$

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \sin \theta \cos \varphi + y \sin \theta \sin \varphi + z \cos \theta \\ y \cos \theta \cos \varphi + y \cos \theta \sin \varphi - z \sin \theta \\ -x \sin \varphi + y \cos \varphi + 0 \end{bmatrix}$$

$$A_x = x \sin \theta \cos \varphi + y \sin \theta \sin \varphi + z \cos \theta$$

$$= R \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + R \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + R \cos^2 \theta$$

$$= R \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + R \cos^2 \theta$$

$$= R \sin^2 \theta + R \cos^2 \theta$$

$$= R(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = R$$

$$A_\theta = 0, \quad A_\varphi = 0$$

$$\vec{A} = R\hat{a}_R$$

$$\vec{A} = \vec{R}$$

و به همین ترتیب

بنابراین:

و یا

-تبدیل مختصات کروی به استوانه‌ای و برعکس:

این تبدیل بندرت استفاده می‌شود:

تبدیل پارمترها

$$\begin{cases} r = R \sin \theta \\ \varphi = \varphi \\ z = R \cos \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} R = \sqrt{r^2 + z^2} \\ \theta = \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \\ \varphi = \varphi \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta & 0 & \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_R \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix}$$

انتگرال گیری

انتگرال‌هایی که در ارتباط با بردارها می‌باشند عبارتند از:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$$\int_V \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$\int_V \vec{F} \cdot d\vec{v}$$

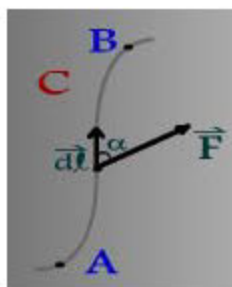
$$\int_C f d\vec{l}$$

$$\int_C f d\vec{l} = \int_C f(\hat{a}_x + d_x + \hat{a}_y d_y + \hat{a}_z d_z) = \hat{a}_x \int_C f(x, y, z) dx + \hat{a}_y \int_C f(x, y, z) dy + \hat{a}_z \int_C f(x, y, z) dz$$

اما مهمترین انتگرال‌گیری، دو انتگرال اول $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{l}$ و $\int_V \vec{F} \cdot d\vec{s}$ است که به ترتیب بنام انتگرال خطی و

انتگرال سطحی از آن نام می‌بریم.

انتگرال خطی Line Integral



بعنوان مثال $\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$ روی مسیری مانند C بصورت زیر انجام می‌گیرد.

برای محاسبه آن در هر نقطه، مؤلفه $\vec{F}$ را که مماس بر منحنی در آن نقطه است ($F \cos \alpha$) را بدست آورده در طول dl ضرب می‌کنیم.

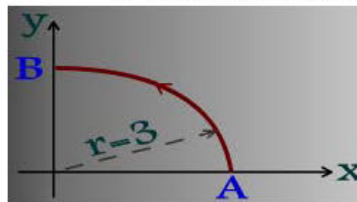
که همان مفهوم $\vec{F} \cdot d\vec{l}$ است و نتیجه انتگرال‌گیری تابع اسکالر $F \cos \alpha dl$ از نقطه A تا B خواهد بود.

$$\int_A^B F \cos \alpha dl$$

مفهوم انتگرال خطی: چنانچه بردار $\vec{F}$ نیروی وارد بر جسمی باشد، این انتگرال میزان کار لازم برای حرکت جسم روی مسیر C از نقطه A به B می‌باشد که می‌تواند متناسب با انرژی لازم برای عملیات فوق باشد.

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

مثال: برای بردار داده شده $\vec{F}$ مطلوبست محاسبه انتگرال خطی $\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$ در امتداد یک چهارم دایره به شعاع ۳ که در شکل نشان داده شده است.



$$\vec{F} = \hat{a}_x xy - \hat{a}_y 2x, \quad A: \begin{vmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad B: \begin{vmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{vmatrix}$$

روش اول: در مختصات مستطیلی

$$d\vec{l} = \hat{a}_x dx + \hat{a}_y dy + \hat{a}_z dz$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{l} = xy dx - 2x dy$$

$$x^2 + y^2 = 9, \quad 0 \leq x, y \leq 3$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{9 - y^2}, \quad y = \sqrt{9 - x^2}$$

معادله مسیر: دایره‌ای به شعاع ۳

و چون مسیر در ربع اول است x و y هر دو مثبت:

بنابراین:

$$\begin{aligned} \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} &= \int_A^B (xy dx - 2y dy) = \int_A^B xy dx - \int_A^B 2x dy \\ &= \int_3^0 x \sqrt{9 - x^2} dy - \int_0^3 2\sqrt{9 - y^2} dy \\ &= \left[-\frac{1}{3} (9 - x^2)^{3/2} \right]_3^0 - \left[y \sqrt{9 - y^2} + 9 \sin^{-1} \frac{y}{3} \right]_0^3 = -9 \left(1 + \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

روش دوم: در مختصات استوانه‌ای

$$\begin{bmatrix} F_r \\ F_\phi \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} xy \\ -2x \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \hat{a}_r (xy \cos \phi - 2x \sin \phi) - \hat{a}_\phi (xy \sin \phi + 2x \cos \phi)$$

$$d\vec{l} = \hat{a}_r dr + \hat{a}_\phi r d\phi + \hat{a}_z dz$$

مسیر در موقعیت $z=0$ و $r=3$ قرار دارد به نحوی که $dz=0$ و $dr=0$ بنابراین $d\vec{l}|_{r=3} = \hat{a}_\phi 3d\phi$ در نتیجه در محاسبه $\vec{F} \cdot d\vec{l}$ تنها مؤلفه F_ϕ کارساز خواهد بود. همچنین $x = 3 \cos \phi$ و $y = 3 \sin \phi$ در F_ϕ جایگزین کرده:

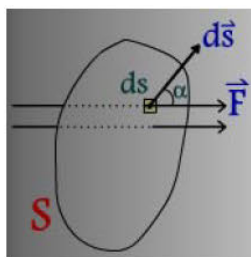
$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -3(9 \sin^2 \phi \cos \phi + 6 \cos^2 \phi) d\phi = -9 \left(1 + \frac{\pi}{2} \right)$$

انتگرال سطحی Surface Integral

طریقه نمایش بصورت روبرو می باشد:

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

و با توجه به تعریف $d\vec{s}$ که بردار عمود بر سطح در جهت خارج از سطح است مؤلفه $\vec{F}$ در جهت عمود بر سطح را بدست آورده $(F \cos \alpha)$ در $d\vec{s}$ ضرب می کنیم و نهایتاً روی سطح S انتگرال می گیریم:



مفهوم انتگرال سطحی: چنانچه $\vec{F}$ بردار نمایش دهنده یک میدان باشد انتگرال $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{s}$ کل فلو

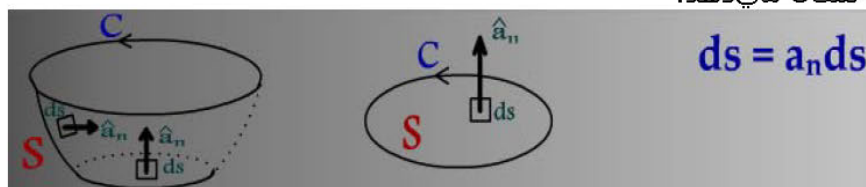
(شار) بردار $\vec{F}$ که از سطح S خارج می شود را محاسبه می نماید.

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

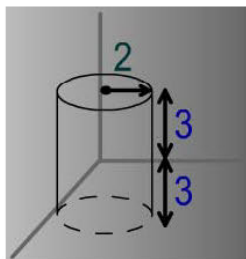
چنانچه سطح S باز باشد از نمایش روبرو استفاده می کنیم:

اگر سطح باز باشد جهت $d\vec{s}$ با استفاده از قانون دست راست بدست می آید.

انگشتان دست راست در جهت منحنی C که سطح باز S را محصور می کند و انگشت شست جهت $d\vec{s}$ را نشان می دهد.



مثال: محاسبه $\oint \vec{F} \cdot d\vec{s}$ روی سطح استوانه داده شده در شکل برای تابع برداری $\vec{F}$:



$a \ BZ$
 r

$$\begin{aligned}
\text{at } z=3 &\Rightarrow \hat{a}_n = \hat{a}_z \Rightarrow d\vec{s} = d\hat{s}_z = \hat{a}_z r dr d\varphi \\
\Rightarrow (\vec{F} \cdot d\vec{s})_{z=3} &= (Bz r dr d\varphi)_{z=3} = 3B r dr d\varphi \\
\Rightarrow \int_{z=3} \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 3B r dr d\varphi = 12\pi B \\
\text{at } z=-3 &\Rightarrow \hat{a}_n = -\hat{a}_z \Rightarrow d\vec{s} = -d\hat{s}_z = -\hat{a}_z r dr d\varphi \\
\Rightarrow (\vec{F} \cdot d\vec{s})_{z=-3} &= -(-3B r dr d\varphi) = 3B r dr d\varphi \\
\Rightarrow \int_{z=-3} \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 3B r dr d\varphi = 12\pi B \\
\text{at } r=2 &\Rightarrow \hat{a}_n = \hat{a}_r \Rightarrow d\vec{s} = d\hat{s}_r = \hat{a}_r r d\varphi dz \\
(\vec{F} \cdot d\vec{s})_{r=2} &= \left(\frac{A}{r} r d\varphi r z \right)_{r=2} = A d\varphi dz \\
\Rightarrow \int_{r=2} \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_{-3}^3 \int_0^{2\pi} A d\varphi dz = 12\pi A \\
\Rightarrow \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} &= 12\pi B + 12\pi B + 12\pi A = 24\pi B + 12\pi A
\end{aligned}$$

مشتق‌گیری: در این قسمت به ارائه سه عمل مشتق‌گیری می‌پردازیم که دو نوع آن بر روی بردارها صورت می‌گیرد که نتیجه یکی اسکالر و دیگری بردار است و نوع سوم مشتق خاصی است که بر روی اسکالر انجام می‌شود اما نتیجه آن یک بردار خواهد بود.

دیورژانس (بخش) یک تابع برداری Divergence

تعریف:

$$\text{div}(\vec{F}) = \nabla \cdot \vec{F} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_s \vec{F} \cdot d\vec{s}}{\Delta v}$$

بنابراین دیورژانس یک تابع برداری با فلوی خروجی از هر متر مکعب برابر می‌گردد. با صرف نظر کردن از طریقه عملیات، محاسبه دیورژانس در دستگاههای مختصات متعامد معرفی شده بصورت زیر خواهد بود.

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad \text{در دستگاه مستطیلی}$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad \text{در دستگاه استوانه‌ای}$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 F_R) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta F_\theta) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} \quad \text{در دستگاه کروی}$$

کاربرد: اگر $\vec{V}$ سرعت حرکت یک سیال در هر نقطه باشد و ρ چگالی حجمی آن سیال $\nabla \cdot (p\vec{v}) = 0$ به مفهوم آن خواهد بود که سیال غیر قابل تراکم‌پذیری است یعنی شار (فلوی) جرم وارد شده به یک سطح بسته همواره با فلوی خارج شده از آن سطح برابر است و $\nabla \cdot (p\vec{v}) > 0$ نشان دهنده یک ماده قابل انفجار و بعنوان منبع source برای یک فرآیند تراکم پذیر نتیجه می‌دهد و بعنوان حفره و گودال sink است.

کرل (پیچش) يك تابع برداري Curl

تعریف:

$$\text{curl}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F}$$

$$(\nabla \times \vec{F})_s = (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{a}_s = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\oint_C \vec{F} d\vec{l}}{\Delta s}$$

با توجه به تعریف فوق مشخص است که چنانچه $\vec{F}$ بر روی سطح Δs عمود باشد و یا تصویری نداشته باشد مؤلفه کرل $\vec{F}$ در جهت $\hat{a}_s$ وجود ندارد و یا بعبارتی چرخشی ندارد یعنی پیچش این بردار در جهت $\hat{a}_s$ برابر صفر است. بنابراین مؤلفه کرل هر بردار در هر جهت معیاری از چرخش خطوط میدان برداری فوق در صفحه عمود بر آن جهت است. $\hat{a}_s$ می‌تواند $\hat{a}_z, \hat{a}_y, \hat{a}_x$ یا هر جهت دیگر باشد.

در مختصات مستطیلی

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \hat{a}_x \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) - \hat{a}_y \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} \right) + \hat{a}_z \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

در مختصات استوانه‌ای

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{a}_r & \hat{a}_\phi r & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_r & rF_\phi & F_z \end{vmatrix}$$

در مختصات کروی

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{a}_R & \hat{a}_\theta R & \hat{a}_\phi R \sin \theta \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ F_R & RF_\theta & R \sin \theta F_\phi \end{vmatrix}$$

گرادیان (شیب) Gradient

گرادیان بزرگترین مقدار مشتق يك تابع اسکالر نسبت به تغییر مکان می‌باشد و جهتش در همان سمتی که بزرگترین مقدار مشتق نسبت به تغییر مکان اتفاق می‌افتد می‌باشد بنابراین گرادیان يك مشتق گیری جهتی است. directional derivative
برای درک مفهوم گرادیان تابع اسکالر ϕ را در نظر بگیرید:

$$\frac{\Delta \phi}{\Delta l}$$

$$\Delta \phi = \phi_2 - \phi_1$$

اگر Δl کمترین مقدار باشد، $\frac{\Delta \phi}{\Delta l}$ بزرگترین تغییرات (مشتق) را خواهد داشت برای محاسبه

$$\left. \frac{\Delta \phi}{\Delta l} \right|_{\max} = \frac{\Delta \phi}{\Delta n}$$

بیشترین تغییرات باید $\Delta l = \Delta n$ شود:

$$\text{grad}(\phi) = \nabla \phi = \frac{d\phi}{dn} \hat{a}_n$$

یعنی

$$\nabla \phi = \hat{a}_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \hat{a}_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + \hat{a}_z \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

در مختصات مستطیلی

در مختصات استوانه ای

$$\nabla \phi = \hat{a}_r \frac{\partial \phi}{\partial r} + \hat{a}_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \phi} + \hat{a}_z \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

در مختصات کروی

$$\nabla \phi = \hat{a}_R \frac{\partial \phi}{\partial R} + \hat{a}_\theta \frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \hat{a}_\varphi \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi}$$

فضایای بر روی توابع برداری

$$\nabla \times \nabla \phi = 0$$

- فضای صفر (Null)

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$$

- قضیه گاوس (دیورژانس)

برای هر سطح بسته s که شامل حجم v است.

$$\int_v \nabla \cdot \vec{F} dv = \oint_s \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

- قضیه استوکس Stokes

برای هر مسیر بسته c که شامل سطح باز s است.

$$\int_s \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{s} = \oint_c \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

- قضیه هلمهولتز Helmholtz

با توجه به شکل ریاضی این قضیه در محیط نامحدود

$$\vec{F}(\vec{R}) = -\nabla \int_v \frac{\nabla' \cdot \vec{F}(\vec{R}')}{4\pi |\vec{R} - \vec{R}'|} dv' + \nabla \times \int_v \frac{\nabla' \times \vec{F}(\vec{R}')}{4\pi |\vec{R} - \vec{R}'|} dv'$$

این قضیه چنین بیان می‌شود که هر میدان برداری توسط پخشش و بیچش (دیورژانس و کرل) میدان کاملاً مشخص می‌شود یعنی برای مشخص کردن کامل میدان $\vec{F}$ فقط نیاز به داشتن $\nabla \cdot \vec{F}$ و $\nabla \times \vec{F}$ است.

بیان دیگر: یک میدان برداری یا تابع برداری را می‌توان بصورت مجموع گرادیان یک تابع اسکالر و

$$\vec{F} = -\nabla V + \nabla \times \vec{A}$$

کرل یک تابع برداری نوشت مثالهای کاربردی قضایای فوق در آخر فصل ارائه خواهد شد.

مشتقات مرتبه بالاتر

علاوه بر قضایای صفر، لاپلاسین نیز یک مشتق از مرتبه بالاتر می‌باشد:

$$\nabla^2 \phi = \nabla \cdot (\nabla \phi)$$

مثلاً در مختصات مستطیلی

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla \phi &= \nabla \cdot \left(\hat{a}_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \hat{a}_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + \hat{a}_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \\ &= \left(\hat{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{a}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\hat{a}_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \hat{a}_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + \hat{a}_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

در مختصات استوانه ای

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}$$

در مختصات کروی

نوع دیگر مشتقات از درجه بالاتر

$$\nabla \times \nabla \times \vec{F} = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$$

که در آن (مختصات مستطیلی)

$$\nabla^2 \vec{F} = \hat{a}_x \left(\frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2} \right) + \hat{a}_y \left(\frac{\partial^2 F_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial z^2} \right) + \hat{a}_z \left(\frac{\partial^2 F_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2} \right)$$

- برخی روابط مشتق‌گیری

$$\nabla(\phi \vec{F}) = \phi \nabla \cdot \vec{F} + \nabla \phi \cdot \vec{F}$$

$$\nabla \times (\phi \vec{F}) = \phi \nabla \times \vec{F} + \nabla \phi \times \vec{F}$$

$$\nabla(\vec{A} + \vec{B}) = \nabla \cdot \vec{A} + \nabla \cdot \vec{B}$$

$$\nabla \times (\vec{A} + \vec{B}) = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times \vec{B}$$

مثال ۱: يك ابر الكتروني در ناحیه بين دو کره هم مرکز (در مبدأ مختصات) به شعاع‌هاي ۲

و ۵ سانتیمتر دارای چگالي بار $\rho = \frac{-3 \times 10^{-8}}{R^4} \cos^2 \phi$ C/m^3 مستقر شده‌اند مطلوبست

محاسبه کل بار محصور شده در این ناحیه.

$$Q = \int_V \rho dv'$$

$$dv' = R'^2 \sin \theta' dR' d\theta' d\phi'$$

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{0.02}^{0.05} \frac{-3 \times 10^{-8} \cos^2 \phi'}{R'^4} R'^2 \sin \theta' dR' d\theta' d\phi'$$

$$= -3 \times 10^{-8} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{0.02}^{0.05} \frac{1}{R'^2} \cos^2 \phi' \sin \theta' dR' d\theta' d\phi'$$

$$= -3 \times 10^{-8} \left[\frac{\phi'}{2} + \frac{\sin 2\phi'}{4} \right]_0^{2\pi} \times [-\cos \theta']_0^\pi \times \left[-\frac{1}{R'} \right]_{0.02}^{0.05}$$

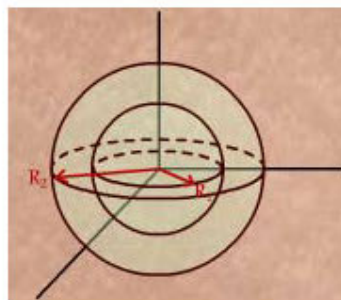
$$= -1.8\pi \text{ } \mu\text{C}$$

مثال ۲: برای تابع برداري داده شده $\vec{F} = \hat{a}_R KR$ ، تعیین کنید که آیا قضیه دیورژانس برای

ناحیه محصور شده توسط سطح‌هاي کروي در $R = R_1$ و $R = R_2$ (به نحویکه $R_2 > R_1$) هم

مرکز در مبدأ مختصات همانطور که در شکل نشان داده شده است، صادق می‌باشد؟

(k عدد ثابت)



$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$\begin{aligned}
 S_1: R = R_1, \quad d\vec{s}_1 = -\hat{a}_R R_1^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\
 \int \left(\vec{F} \cdot d\vec{s} \right)_{S_1} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (KR_1) \hat{a}_R \cdot (-\hat{a}_R R_1^2 \sin \theta d\theta d\varphi) = -4\pi KR_1^3 \\
 S_2: R = R_2, \quad d\vec{s}_2 = d\vec{s}_R = \hat{a}_R R_2^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\
 \int \left(\vec{F} \cdot d\vec{s} \right)_{S_2} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (KR_2) \hat{a}_R \cdot \hat{a}_R R_2^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi KR_2^3 \\
 \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 4\pi k(R_2^3 - R_1^3)
 \end{aligned}$$

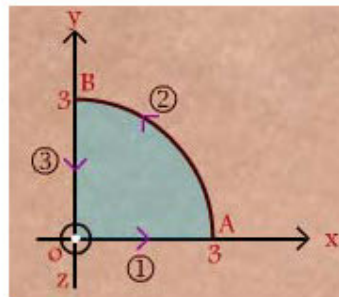
بنابراین

اما

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \vec{F} &= \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 F_R) + 0 + 0 = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (KR^3) = 3K \\
 \int_V \nabla \cdot \vec{F} dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{R_1}^{R_2} 3KR^2 \sin \theta dR d\theta d\varphi = 3k \left[\frac{4\pi}{3} (R_2^3 - R_1^3) \right] = 4\pi k(R_2^3 - R_1^3) \\
 \Rightarrow \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_V \nabla \cdot \vec{F} dV
 \end{aligned}$$

مثال ۳:

برای بردار داده شد $\vec{F} = \hat{a}_x xy - \hat{a}_y 2x$ صحت قضیه استوکس روی یک ربع دیسک به شعاع ۳ که در ناحیه اول دستگاه مختصات قرار دارد را بررسی کنید.



$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_0^A \vec{F} \cdot d\vec{l} + \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} + \int_B^0 \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

مسیر ۱:

$$y = 0, \quad dy = 0, \quad d\vec{l} = \hat{a}_x dx$$

$$\Rightarrow \vec{F} \cdot d\vec{l} = (-\hat{a}_y 2x)(\hat{a}_x dx) = 0 \Rightarrow \int_0^A \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = -9 \left(1 + \frac{\pi}{2} \right)$$

مسیر ۲: قبلاً در مثالی محاسبه گردید.

مسیر ۳:

$$x = 0, \quad dx = 0, \quad d\vec{l} = -\hat{a}_y dy, \quad F = 0$$

$$\Rightarrow F d\vec{l} = (0) \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \int_B^0 \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$$

بنابراین

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = -9 \left(1 + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & -2x & 0 \end{vmatrix} = \hat{a}_x(0) - \hat{a}_y(0) = \hat{a}_z \left(\frac{\partial(-2x)}{\partial x} - \frac{\partial(xy)}{\partial y} \right) = \hat{a}_z(-2-x)$$

اما

$$\int_s \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad , \quad d\vec{s}_z = \hat{a}_z dx dy$$

$$\int_s \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} -(2+x) dx dy = - \int_0^3 \left[2\sqrt{9-y^2} + \frac{1}{2}(9-y^2) \right] dy$$

$$= - \left[y\sqrt{9-y^2} + 9 \sin^{-1} \frac{y}{3} + \frac{9}{2}y - \frac{y^3}{9} \right]_0^3 = -9 \left(1 + \frac{\pi}{2} \right)$$

روش دیگر: محاسبه در مختصات استوانه‌ای

$$\nabla \times \vec{F} = -\hat{a}_z(2+x) = \hat{a}_z(2+r \cos \varphi)$$

$$d\vec{s} = \hat{a}_z r dr d\varphi$$

$$\int_s \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^{\pi/2} \int_0^3 -(2+r \cos \varphi) r dr d\varphi = - \int_0^{\pi/2} \int_0^3 2r dr d\varphi - \int_0^{\pi/2} \int_0^3 r^2 \cos \varphi dr d\varphi$$

$$= - \frac{\pi}{2} (r^2)_0^3 + \left(\frac{1}{3} r^3 \right)_0^3 [-\sin \varphi]_0^{\pi/2}$$

$$= -9 \times \frac{\pi}{2} - 9 \times 1 = -9 \left(1 + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\oint_c \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_s \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

بنابراین

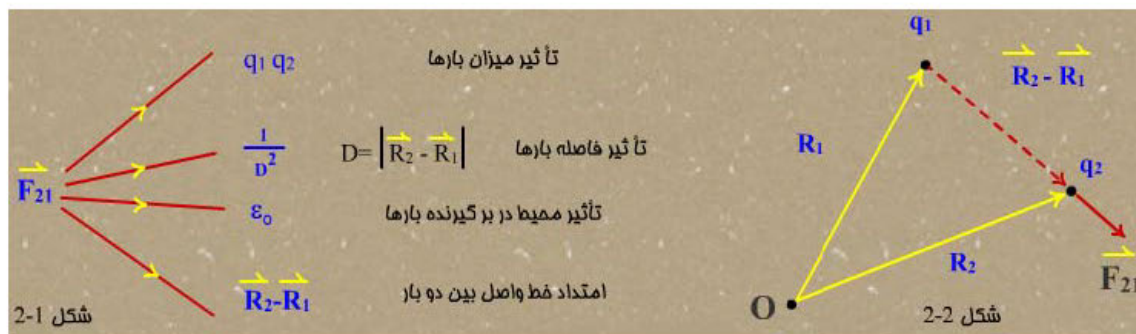
فصل دوم

میدان‌های الکتریکی ساکن Static Electric Fields

مبنای قوانین حاکم بر میدان‌های الکتریکی ساکن نیروی جاذبه یا دافعه بین بارهای الکتریکی می‌باشد که همان قانون کولمب است. افرادی که در این زمینه مطالعات و بررسی‌های علمی انجام داده‌اند: تالس، گیلبرت و نهایتاً افسر فرانسوی بنام کولمب می‌باشد که توانست اندازه‌گیری‌های دقیقی روی این نیرو انجام دهد.

قانون کولمب در فضای آزاد (خلأ) Free space

در آزمایش‌های بعمل آمده توسط کولمب به نتایج زیر در خصوص نیروی وارد بر يك بار الکتریکی ناشی از بار الکتریکی دیگر دست یافت: با توجه به وجود دو بار الکتریکی q_1 و q_2 که به ترتیب در موقعیت $\vec{R}_1$ و $\vec{R}_2$ قرار گرفته‌اند



$$\vec{F}_{21} \propto \frac{q_1 q_2}{\epsilon_0 |\vec{R}_2 - \vec{R}_1|^2} \frac{\vec{R}_2 - \vec{R}_1}{|\vec{R}_2 - \vec{R}_1|}$$

بنابراین:

$$\frac{\vec{R}_2 - \vec{R}_1}{|\vec{R}_2 - \vec{R}_1|} \text{ بردار واحد } \vec{R}_2 - \vec{R}_1 \text{ برابر است با:}$$

ضریب نفوذپذیری الکتریکی خلأ Electric permittivity coefficient of Free-space

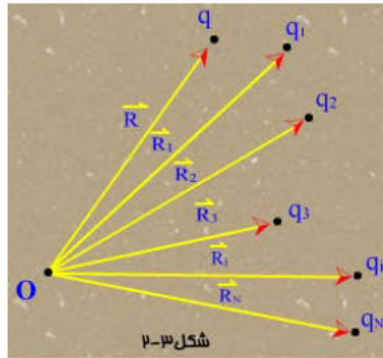
$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} = 8.85 \times 10^{-12} \left[\frac{F}{m} \right] \text{ یا } \left[\frac{Nm^2}{C^2} \right]$$

ضریب تناسب معادله محاسبه برای دستگاه اندازه‌گیری MKS یا SI برابر $\frac{1}{4\pi}$ می‌باشد.

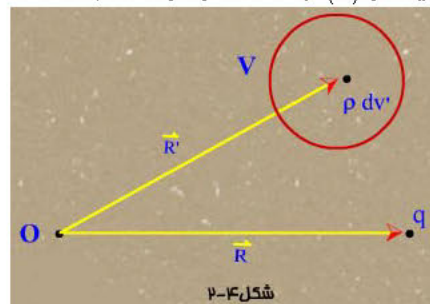
بنابراین

$$\vec{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 |\vec{R}_2 - \vec{R}_1|^3} (\vec{R}_2 - \vec{R}_1)$$

بدلیل داشتن رابطه خطی نیروی فوق با میزان بارها، چنانچه چندین بار در فضای خلأ وجود داشته باشد می‌توان چنین نوشت:

برای N بار گسیسته:

$$\vec{F}_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{qq_i(\vec{R} - \vec{R}_i)}{|\vec{R} - \vec{R}_i|^3}$$

و برای یک بار پیوسته به چگالی بار $\rho(\vec{R})$ مستقر در حجم V 

$$d\vec{F}_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\rho(\vec{R}')dv'(\vec{R} - \vec{R}')}{|\vec{R} - \vec{R}'|^3}$$

$$\vec{F}_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{q\rho(\vec{R}')dv'(\vec{R} - \vec{R}')}{|\vec{R} - \vec{R}'|^3}$$

مثال: سه بار نقطه ای q_1 ، q_2 و q که به ترتیب در نقاط p_1 و p_2 و p در فضای خالی قرار گرفته‌اند را در نظر بگیرید نیرو وارد بر بار q چقدر است؟

$$\begin{cases} q_1 = 3.2 \times 10^{-9} \text{ C} \\ p_1(2, 1, 0) \end{cases} \quad \begin{cases} q_2 = -4.8 \times 10^{-9} \text{ C} \\ p_2(3, 2, 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} q = -1.6 \times 10^{-9} \text{ C} \\ p(1, 2, 0) \end{cases}$$

$$\vec{R} = \overrightarrow{OP} = \hat{a}_x(1-0) + \hat{a}_y(2-0) + \hat{a}_z(0-0) = \hat{a}_x + 2\hat{a}_y$$

$$\vec{R}_1 = \overrightarrow{OP_1} = 2\hat{a}_x + \hat{a}_y$$

$$\vec{R}_2 = \overrightarrow{OP_2} = 3\hat{a}_x + 2\hat{a}_y$$

$$\vec{R} - \vec{R}_1 = \hat{a}_x(1-2) + \hat{a}_y(2-1) = -\hat{a}_x + \hat{a}_y$$

$$|\vec{R} - \vec{R}_1| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\vec{R} - \vec{R}_2 = -2\hat{a}_x$$

$$|\vec{R} - \vec{R}_2| = 2$$

$$\vec{F}_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^2 \frac{qq_i}{|\vec{R} - \vec{R}_i|^3} (\vec{R} - \vec{R}_i)$$

$$\vec{F}_q = \frac{-1.6 \times 10^{-9}}{4\pi \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}} \left[\frac{3.2 \times 10^{-9}}{(\sqrt{2})^3} (-\hat{a}_x + \hat{a}_y) + \frac{-4.8 \times 10^{-9}}{2^3} (-2\hat{a}_x) \right]$$

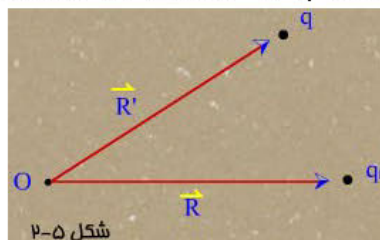
$$\vec{F}_q = (-\hat{a}_x - \hat{a}_y 16.3) \times 10^{-9} \quad N$$

میدان الکتریکی و شدت میدان الکتریکی در فضای خالی

وجود يك بار الکتریکی در فضا، به تمام نقاط آن فضا خاصیتی الکتریکی می‌دهد (میدان الکتریکی) به نحویکه بارهای دیگر از وجود این بار آگاه می‌شوند. بجای محاسبه نیرو در معرفي يك میدان، از شدت میدان الکتریکی استفاده می‌شود که بصورت زیر بیان و تعریف می‌گردد:

$$\vec{E}(\vec{R}) = \lim_{q_t \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(\vec{R})}{q_t} \quad [N/C] \text{ یا } [V/m]$$

$\vec{F}$ نیروی وارد بر بار کوچک آزمایشی q_t که در نقطه $\vec{R}$ قرار دارد.



$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(\vec{R} - \vec{R}')}{|\vec{R} - \vec{R}'|^3}$$

بعبارتی $\vec{E}$ شدت میدان الکتریکی در هر نقطه برابر است با نیروی وارد بر بار $+1$ کولمبی بنابراین برای مجموعه بارهای گسسته

$$\vec{E}(\vec{R}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i(\vec{R} - \vec{R}_i)}{|\vec{R} - \vec{R}_i|^3}$$

$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{R}') dV'(\vec{R} - \vec{R}')}{|\vec{R} - \vec{R}'|^3}$$

برای بار پیوسته حجمی

چگالی بار حجمی پیوسته ρ با واحد C/m^3

$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\rho_s(\vec{R}') ds(\vec{R} - \vec{R}')}{|\vec{R} - \vec{R}'|^3}$$

بار پیوسته سطحی

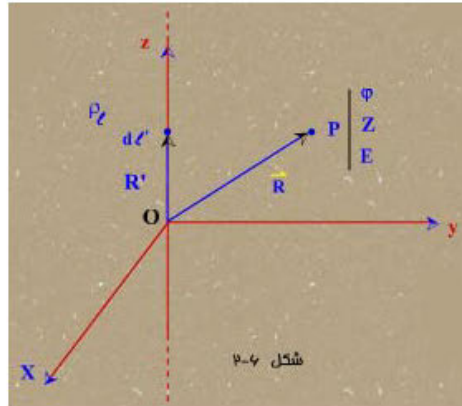
چگالی بار پیوسته سطحی ρ_s با واحد C/m^2

$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\rho_l(\vec{R}') dl'(\vec{R} - \vec{R}')}{|\vec{R} - \vec{R}'|^3}$$

چگالی بار پیوسته خطی ρ_l با واحد C/m

مثال: محاسبه شدت میدان الکتریکی ناشی از یک بار خطی به طول نامحدود، مستقیم با چگالی بار یکنواخت ρ_l در فضای خلاء می‌توان پیش بینی کرد که $\vec{E}$ مؤلفه z و φ نخواهد داشت.

$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_l(\vec{R}') d\vec{l}'}{|\vec{R} - \vec{R}'|^3} (\vec{R} - \vec{R}')$$



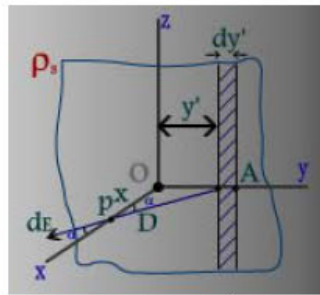
$$\vec{R} = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z \quad r\hat{a}_r = z\hat{a}_z$$

$$\vec{R} = z\hat{a}_z$$

$$\vec{R} = R\hat{a}_z \quad (z - z')\hat{a}_z$$

$$|\vec{R} - \vec{R}'| = \sqrt{r^2 + (z - z')^2} \quad dl = dz$$

$$E(R) = \frac{1}{4} \int \frac{dz}{[r^2 + (z - z')^2]^2} [r\hat{a}_r + (z - z')\hat{a}_z]$$



ساده‌ترین نقطه برای محاسبه $\vec{E}$ نقطه $P(0,0,0)$ یعنی نقطه‌ای روی محور x ‌هاست.

روش اول: استفاده از فرمول کلی $\vec{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_s (\vec{R} - \vec{R}') dz' dy'}{4\pi\epsilon_0 |\vec{R} - \vec{R}'|^3}$ و با انتخاب دیفرانسیلی از

سطح با مقدار بار $\rho_s dz' dy'$ و ادامه کار

روش دوم: بکارگیری از نتایج مثال قبل (بار خطی نامحدود)

$$d\vec{E}|_P = \frac{\rho_s}{2\pi\epsilon_0 D} = \frac{\rho_s dy'}{2\lambda\epsilon_0 D}, \quad d\vec{E} = d\vec{E}_x + d\vec{E}_y$$

بدلیل داشتن منبع بار خطی نامحدود $dE_y = 0$ خواهد شد

با جایگزینی $\cos\alpha$ و D بر حسب پارمترهای اصلی (با توجه به مثلث OPA)

$$D = \sqrt{x^2 + y'^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y'^2}}$$

$$dE = \frac{x\rho_s dy'}{2\pi\epsilon_0 (x^2 + y'^2)^{3/2}}$$

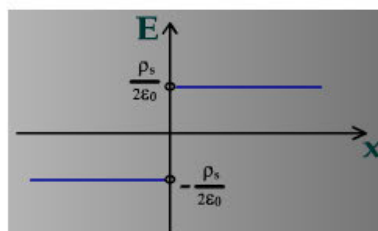
$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\rho_s dy'}{2\pi\epsilon_0 (x^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{\rho_s}{2\pi\epsilon_0} \left[\tan^{-1} \frac{y'}{x} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \hat{a}_x \quad x > 0$$

$$\vec{E} = -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \hat{a}_x \quad x < 0$$

که هیچگونه وابستگی به موقعیت نقطه‌ای که شدت میدان بدست خواهد آمد ندارد.

دلیل: نامحدود بودن ابعاد بار صفحه‌ای



فلوی میدان الکتریکی و قانون گاوس

با توجه به مفهوم انتگرال سطحی روی سطح بسته روشن است که انتگرال زیر فلوی میدان الکتریکی خارج شده از سطح را محاسبه می‌کند

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

چنانچه این سطح کل منابع (بار الکتریکی) که میدان $\vec{E}$ را بوجود آورده را شامل شود این انتگرال متناسب بار کل بار الکتریکی محصور شده در حجمی که سطح s آنرا احاطه کرده خواهد بود.

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{total} \quad \text{بعبارتی:}$$

$$Q_{total} = \int_V \rho dv'$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dv' \quad \text{و یا}$$

رابطه فوق قانون گاوس و سطح s ، سطح گاوسی گفته می‌شود. این قانون مستقل از شکل سطح s است.

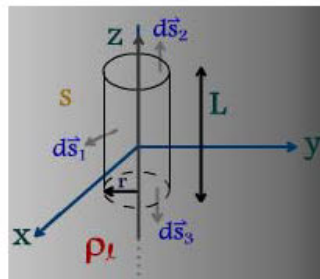
بعنوان مثال برای یک بار نقطه‌ای واقع در مرکز مختصات برای یک سطح گاوسی کروی:

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{a}_R \cdot \hat{a}_R R^2 \sin\theta d\theta d\varphi \\ &= \frac{q}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

اصل مهم: برای حل مسائل با استفاده از قانون گاوس بایستی سطحی انتخاب نمود که E روی آن سطح ثابت باشد.

مثال: بار خطی بطول نا محدود و به چگالی $\rho_l \text{ C/m}$ روی محور z ها قرار دارد مطلوبست شدن میدان الکتریکی در هر نقطه.

انتخاب سطح گاوسی: استوانه‌ای به طول L و با شعاع قاعده برابر با r و با محور منطبق با محور z ها



$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dv'$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int \vec{E} \cdot d\vec{s}_1 + \int \vec{E} \cdot d\vec{s}_2 + \int \vec{E} \cdot d\vec{s}_3$$

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \int d\vec{s}_1 = E 2\pi r L$$

سطح جانبی

چون مقدار E در فاصله r (روی سطح جانبی) از منبع مقداری ثابت و در جهت $\hat{a}_r$ است (عمود بر منبع) و $d\vec{s} = d\vec{s}_r$

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{s}_2 = \int E \hat{a}_r \cdot d\vec{s}_z = 0$$

قاعده بالا

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{s}_3 = \int E \hat{a}_r \cdot (-d\vec{s}_z) = 0$$

قاعده پایین

بنابراین

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = E 2\pi r L$$

$$\int_V \rho dv' \equiv \int_L \rho_l dl' = \int_{-L/2}^{L/2} \rho_l dz' = \rho_l L$$

اما:

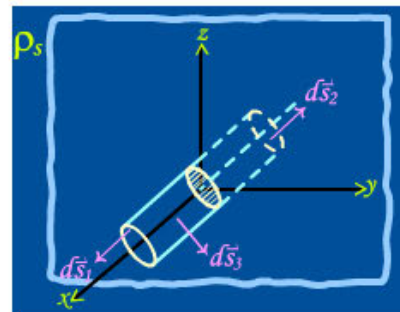
$$E 2\pi r L = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_l L) \Rightarrow E = \frac{\rho_l}{2\pi r \epsilon_0}$$

در نتیجه:

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{\rho_l}{2\pi \epsilon_0 r} \hat{a}_r$$

که دقیقاً مشابه جواب مثال قبلی است که از روش کلی حل شد.

مثال: مطلوبست تعیین شدت میدان الکتریکی در نقاط مختلف در مقابل یک بار سطحی نامحدود به چگالی بار $\rho_s \text{ C/m}^2$



انتخاب سطح گاوسی: هر شکل فضایی که توسط صفحه باردار به دو قسمت تقسیم گردیده و بر صفحه باردار عمود باشد از جمله یک استوانه یا یک مکعب مستطیل استوانه‌ای بطول L ، محور استوانه محور x ها و سطح قاعده آن A فرض شود.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dv$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int \vec{E} \cdot d\vec{s}_1 + \int \vec{E} \cdot d\vec{s}_2 + \int \vec{E} \cdot d\vec{s}_3$$

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{\text{روبر}} \vec{E} \cdot d\vec{s}_x = E \int ds_x = E \Big|_{x=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \times A$$

$$E ds \quad E (ds) \quad E ds \quad E \Big| \quad A$$

اما:

$$Q_{total} = \int \rho_s ds' = \rho_s A$$

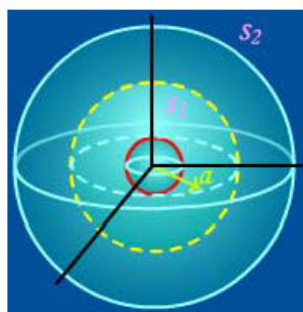
پس:

$$2EA = \frac{\rho_s A}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}, \quad \vec{E} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \hat{a}_x$$

مثال: در فضای آزاد بار پیوسته‌ای تا شعاع a به چگالی $\rho = \frac{\rho_0 R^2}{a^2} \text{ C/m}^3$ موجود است شدت

میدان الکتریکی در هر نقطه را حساب کنید.

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_v \rho dv'$$



سطح گاوسی: کره به مرکز مبدأ و به شعاع R

$$I: \quad R < a$$

$$II: \quad R > a$$

$$\oint_{s_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{s}_1 = E_1 \int_{s_1} ds_R = E_1 4\pi R^2$$

برای $R < a$:

$$Q = \int \rho dv' = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \frac{\rho_0 R'^2}{a^2} R'^2 \sin \theta' dR' d\theta' d\phi'$$

$$Q = \frac{\rho_0 R^5}{5a^2} 4\pi$$

$$E 4\pi R^2 = \frac{\rho_0 R^5}{5\epsilon_0 a^2} 4\pi$$

بنابراین:

$$\vec{E} = \frac{\rho_0 R^3}{5\epsilon_0 a^2} \hat{a}_R$$

برای $R > a$:

$$\oint_{s_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{s}_2 = E_2 \int_{s_2} ds_R = E_2 4\pi R^2$$

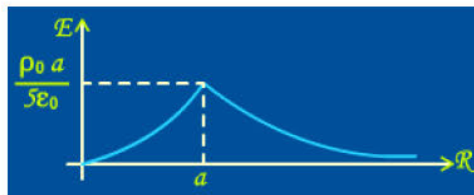
$$Q = \int \rho dv' = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a \frac{\rho_0 R'^2}{a^2} R'^2 \sin \theta' dR' d\theta' d\phi'$$

$$= \frac{4\pi \rho_0 a^3}{5}$$

بنابراین:

$$E 4\pi R^2 = \frac{4\pi \rho_0 a^3}{5\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_0 a^3}{5\epsilon_0 R^2} \hat{a}_R$$



شکل دیفرانسیلی قانون گاوس (معادله اول ماکسول)

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dv'$$

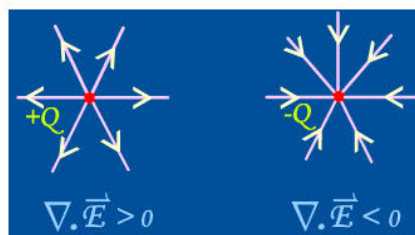
طبق قضیه گاوس

$$\int_V \nabla \cdot \vec{E} dv' = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dv'$$

$$\int_V \nabla \cdot \vec{E} dv' = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dv' \Rightarrow \int_V \nabla \cdot \vec{E} dv' - \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dv' = 0$$

$$\int_V \left(\nabla \cdot \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) dv' = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

نتیجه: چون دیورژانس با فلوی خروجی از واحد حجم متناسب است بنابراین اگر $\nabla \cdot \vec{E}$ مثبت شود یعنی ρ مثبت و یا به عبارتی خطوط میدان الکتریکی از روی بار مثبت شروع می‌شوند و بر عکس این خطوط روی بار منفی ختم می‌گردند.



مثال: بار پیوسته‌ای که در فضای آزاد میدان الکتریکی با شدت $\vec{E}$ ایجاد می‌کند را بدست آورید:

$$\vec{E} = \begin{cases} -\hat{a}_R \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} R & 0 \leq R \leq b \\ -\hat{a}_R \frac{\rho_0 b^3}{3\epsilon_0 R^2} & R > b \end{cases}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}$$

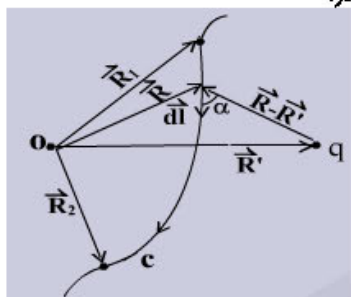
$$0 \leq R \leq b \quad \Rightarrow \quad \rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \left[-\hat{a}_R \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} R \right] = \epsilon_0 \times \frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left[R^2 \left(-\frac{\rho_0}{3\epsilon_0} R \right) \right] = -\rho_0$$

$$R > b \quad \Rightarrow \quad \rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \left[-\hat{a}_R \frac{\rho_0 b^3}{3\epsilon_0 R^2} \right] = \epsilon_0 \times \frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left[R^2 \left(\frac{\rho_0 b^3}{3\epsilon_0 R^3} \right) \right] = 0$$

تابع پتانسیل الکتریکی Electric potential

می‌دانیم که شدت میدان الکتریکی با نیروی وارد بر یک بار الکتریکی که در آن میدان قرار می‌گیرد رابطه دارد پتانسیل الکتریکی با میزان انرژی لازم برای آنکه یک بار الکتریکی از نقطه‌ای به نقطه دیگر حرکت کند رابطه دارد.

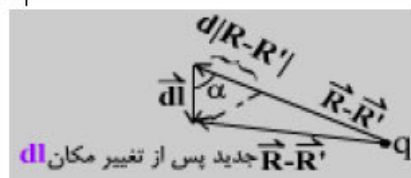
بنابراین اگر بار نقطه‌ای q را که در نقطه R' واقع است و تولید یک میدان در همه فضای خالی می‌کند در نظر بگیریم، مقدار انرژی لازم برای حرکت دادن یک بار q_t از نقطه $\vec{R}_1$ به نقطه $\vec{R}_2$ روی مسیر c را می‌خواهیم محاسبه کنیم.



$$\vec{F}_{q_t} = \frac{qq_t}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{R} - \vec{R}')}{|\vec{R} - \vec{R}'|^3}$$

$$\vec{F} = -\vec{F}_{q_t} \quad \text{نیروی لازم برای حرکت } q_t$$

$$W = \int_{\vec{R}_1}^{\vec{R}_2} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{\vec{R}_1}^{\vec{R}_2} \frac{qq_t}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{R} - \vec{R}')}{|\vec{R} - \vec{R}'|^3} \cdot d\vec{l}$$



$$(\vec{R} - \vec{R}') \cdot d\vec{l} = |\vec{R} - \vec{R}'| dl \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{d|\vec{R} - \vec{R}'|}{dl}$$

بنابراین:

$$W = -\frac{qq_t}{4\pi\epsilon_0} \int_{\vec{R}_1}^{\vec{R}_2} \frac{|\vec{R} - \vec{R}'| d(|\vec{R} - \vec{R}'|)}{|\vec{R} - \vec{R}'|^3} = \frac{-qq_t}{4\pi\epsilon_0} \int_{\vec{R}_1}^{\vec{R}_2} \frac{d(|\vec{R} - \vec{R}'|)}{|\vec{R} - \vec{R}'|^2}$$

$$W = q_t \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{R}_2 - \vec{R}'|} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{R}_1 - \vec{R}'|} \right]$$

پس W بستگی به مسیر c ندارد و تنها تابع نقاط ابتدایی و انتهایی است.

$$W = q_t [v(\vec{R}_2) - v(\vec{R}_1)] = q_t \Delta V$$

بنابراین انرژی لازم برای تغییر مکان q_t از نقطه‌ای به نقطه دیگر با حاصلضرب اختلاف پتانسیل دو نقطه فوق در بار q_t مساویست.

$$V(\vec{R}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{R} - \vec{R}'|}$$

پتانسیل نقطه $\vec{R}$ به دلیل وجود بار الکتریکی q در نقطه $\vec{R}'$ واحد J/C یا Volt

$$V(\vec{R}) = \sum_{i=1}^N \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{R} - \vec{R}'|} \quad \text{برای } N \text{ بار الکتریکی نقطه ای}$$

$$V(\vec{R}) = \int_V \frac{\rho(\vec{R}') dv'}{4\pi\epsilon_0 |\vec{R} - \vec{R}'|} \quad \text{برای یک بار پیوسته}$$

مثال: اگر بار نقطه ای 10^{-7} کولمبی در $(1, 2, 3)$ واقع باشد، تابع پتانسیل را در هر نقطه در فضای خالی به دست آورید.

$$\vec{R} = \hat{a}_x x + \hat{a}_y y + \hat{a}_z z$$

$$\vec{R} = \hat{a}_x + \hat{a}_y 2 + \hat{a}_z 3$$

$$|\vec{R} - \vec{R}'| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2}$$

$$V(\vec{R}) = V(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{R} - \vec{R}'|} = \frac{900}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2}}$$

مثال: با پیوسته با چگالی $10^{-7} R \text{ C/m}^3$ از مبدا مختصات تا شعاع ۱ متر قرار دارد پتانسیل را در مرکز مختصات به دست آورید.

$$\vec{R} = 0$$

$$\vec{R}' = \hat{a}_R R'$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{R}') dv'}{|\vec{R} - \vec{R}'|}$$

$$|\vec{R} - \vec{R}'| = R'$$

$$V(0,0,0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^1 \frac{10^{-7} R'}{R'} 4\pi R'^2 dR' = 1200\pi$$

- دیدگاهی دیگر

$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{q(\vec{R} - \vec{R}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{R} - \vec{R}'|^3}$$

$$V(\vec{R}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{R} - \vec{R}'|}$$

$$\frac{d}{dR} \left(\frac{1}{|\vec{R} - \vec{R}'|} \right) = -\frac{1}{|\vec{R} - \vec{R}'|^2} \equiv \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x^2}$$

$$\vec{E}(\vec{R}) = -\nabla V(\vec{R})$$

بنابراین:

* بنابراین تا کنون سه روش برای محاسبه $\vec{E}$ قابل دسترس است.

$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{R}') dv'}{|\vec{R} - \vec{R}'|^3} (\vec{R} - \vec{R}') \quad \text{۱ - استفاده از فرمول کلی (بر پایه قانون کولمب)}$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dv' \quad \text{۲ - استفاده از قانون گاوس}$$

$$V(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho dv'}{|\vec{R} - \vec{R}'|} \quad \text{۳ - استفاده از رابطه } \vec{E} = -\nabla V \text{ با محاسبه } V \text{ از رابطه}$$

- شکل انتگرالی رابطه $\vec{E} = -\nabla V$ عبارتست از:

$$V(P_2) - V(P_1) = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

-قانون (معادله) دوم ماکسول در میدان ساکن

$$\nabla \times (-\nabla V) = -\nabla \times (\nabla V) = 0$$

چون:

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

بنابراین:

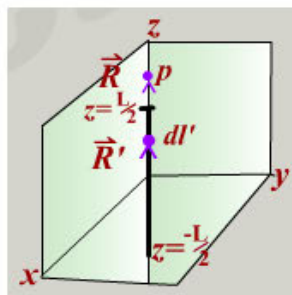
$$\int_V \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

و شکل انتگرالی آن:

بعبارتی چنانچه بار الکتریکی در يك میدان الکتریکی ساکن در يك مسیر بسته گردش نماید (نقطه شروع و اتمام انتگرال گیری یکی باشد) هیچگونه انرژی از میدان کسب و هیچگونه انرژی به میدان داده نمی شود یعنی انرژی ذخیره شده ثابت است و میدانهای فوق را کنزرواتو (Conservation) یا پایستار گویند.

- بنابراین کرل و دیورژانس میدان الکتریکی ساکن محاسبه گردید و در نتیجه این میدان طبق قضیه هلمهولتز کاملاً مشخص شده است.

مثال: منبع بار خطی به طول L بر روی محور z ها با چگالی یکنواخت ρ_l در دست است. مطلوبست محاسبه شدت میدان الکتریکی و تابع پتانسیل الکتریکی نقاط مستقر در امتداد این بار خطی:



$$\left. \begin{array}{l} r = 0 \\ \varphi = 0 \\ z = z \end{array} \right\} P$$

$$\vec{R} = z\hat{a}_z$$

$$\vec{R}' = z'\hat{a}_z$$

$$|\vec{R} - \vec{R}'| = (z - z')$$

$$z > L/2$$

$$dl' = dz'$$

$$V(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\rho_l dz'}{(z - z')}$$

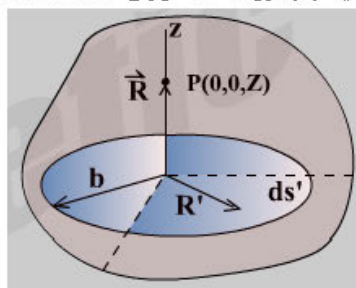
$\Rightarrow$

$$V(\vec{R}) = -\frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \ln(z - z') \Big|_{-L/2}^{L/2}$$

$$V = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{z + (L/2)}{z - (L/2)} \right] \quad |z| > L/2$$

$$\vec{E} = -\nabla V = -\hat{a}_z \frac{dv}{dz} = \hat{a}_z \frac{\rho_l L}{4\pi\epsilon_0 \left[z^2 - (L/2)^2 \right]} \quad z > L/2$$

مثال: مطلوبست محاسبه شدت میدان الکتریکی بر روی محور یک دیسک دایره‌ای با شعاع b که بار یکنواخت سطحی به چگالی ρ_s روی آن توزیع شده است.



$$\vec{R} = z\hat{a}_z$$

$$\vec{R}' = r'\hat{a}_r$$

$$|\vec{R} - \vec{R}'| = \sqrt{z^2 + r'^2}$$

$$ds' = r' dr' d\phi'$$

$$V(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_s ds'}{|\vec{R} - \vec{R}'|} = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^b \frac{r' dr' d\phi'}{\sqrt{z^2 + r'^2}}$$

$$V(\vec{R}) = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} 2\pi \sqrt{z^2 + r'^2} \Big|_0^b = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \left[(z^2 + b^2)^{1/2} - |z| \right]$$

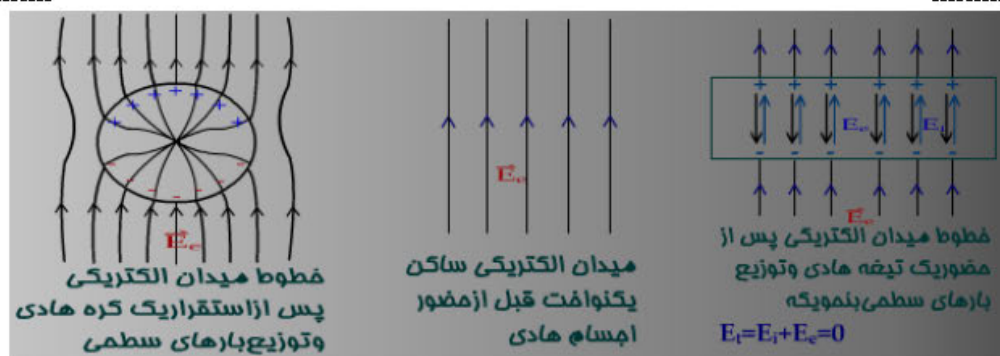
$$\vec{E} = -\nabla V = -\hat{a}_z \frac{dv}{dz} = \begin{cases} \hat{a}_z \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \left[1 - z(z^2 + b^2)^{-1/2} \right] & z > 0 \\ -\hat{a}_z \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \left[1 + z(z^2 + b^2)^{-1/2} \right] & z < 0 \end{cases}$$

حضور هادی‌ها در میدان الکتریکی ساکن

چنانچه یک جسم هادی را در نظر بگیریم، روشن است که هیچ اختلاف پتانسیلی بین کلیه نقاط آن وجود ندارد و هادی در یک سطح پتانسیل ثابت قرار دارد بنابراین با توجه به $\vec{E} = -\nabla V$ شدت میدان در جسم هادی صفر خواهد بود.

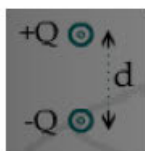
از طرفی چنانچه در جسم هادی شدت میدان الکتریکی غیر صفری وجود داشته باشد، این میدان سبب اعمال نیرو به بارهای الکتریکی (الکترونها) موجود در هادی کرده و در نتیجه تجمع بارهای هم‌نام منفی در یک طرف و بارهای مثبت در طرف دیگر شده یعنی ایجاد اختلاف پتانسیل بین این دو مکان از هادی می‌گردد که خلاف واقع است بنابراین $\vec{E}$ در داخل اجسام هادی صفر خواهد بود.

چنانچه یک هادی در یک میدان الکتریکی خارجی قرار گیرد سبب تغییر توزیع بارهای موجود در داخل هادی می‌شود و اگر این هادی خنثی باشد، توزیع جدید بارها به نحوی خواهد بود که میدان بوجود آمده از این توزیع جدید میدانی بوجود می‌آورد که دقیقاً برابر با میدان خارجی اما در خلاف جهت با آن باشند به نحوی که $\vec{E}$ کل در داخل هادی صفر شود توزیع بارها بر روی سطوح هادی بطریقی خواهد شد تا خطوط میدان در جهت عمود بر این سطوح قرار گیرند چه در غیر اینصورت ایجاد مؤلفه مماسی کرده و همین امر نشان دهنده وجود میدان غیر صفر در هادی (سطح هادی) می‌شود که غیر ممکن است.



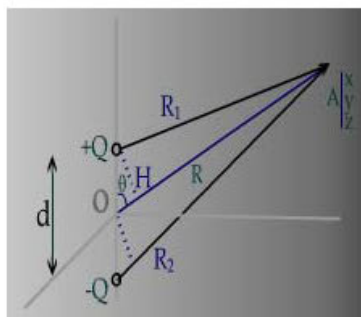
دو قطبی الکتریکی Electric Dipole

ترکیبی از دو بار الکتریکی مساوی و غیر همنام که بفاصله مشخصی از هم قرار گرفته‌اند. بعنوان مثال: دو بار $+Q$ و $-Q$ بفاصله d



محاسبه تابع پتانسیل الکتریکی يك دو قطبی

در این قسمت پتانسیل ناشی از يك دو قطبی الکتریکی در ناحیه دور (Far zone) را بدست می‌آوریم و با استفاده از رابطه $\vec{E} = -\nabla V$ شدت میدان الکتریکی آن (Far Field) را محاسبه خواهیم کرد.



يك دو قطبی واقع در مبدأ مختصات را در نظر بگیرید.

محاسبه پتانسیل نقطه‌ای کلی مانند $\begin{matrix} R \\ A \\ \theta \\ \varphi \end{matrix}$

$$V(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^2 \frac{q_i}{|\vec{R} - \vec{R}_i|}$$

$$V(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{+Q}{R_1} + \frac{-Q}{R_2} \right]$$

$$R_1, R_2, R \gg d \Rightarrow \frac{d^2}{R^2} \rightarrow 0$$

ناحیه دور

$$R_1 \approx R - \frac{d}{2} \cos \theta$$

$$R_2 \approx R + \frac{d}{2} \cos \theta$$

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R_1} + \frac{-1}{R_2} \right] \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R - \frac{d}{2} \cos \theta} - \frac{1}{R + \frac{d}{2} \cos \theta} \right]$$

همچنین:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{R + \frac{d}{2} \cos \theta - R + \frac{d}{2} \cos \theta}{R^2 - \frac{d^2}{4} \cos^2 \theta} \right] = \frac{Qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 R^2 \left[1 - \frac{d^2}{4R^2} \cos^2 \theta \right]}$$

$$V(\vec{R}) \approx \frac{Qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0}$$

$\vec{P}$ گشتاور دو خطی الکتریکی Electric Dipole moment جهت بردار $\vec{P}$ از بار منفی بطرف بار مثبت است (یعنی برعکس جهت $\vec{E}$)

$$P = Qd, \quad \hat{a}_p = \hat{a}_z$$

$$V(\vec{R}) = \frac{P \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

$$\begin{matrix} +Q & 0 \\ \uparrow & \vec{P} \\ -Q & 0 \end{matrix}$$

$$\hat{a}_z \cdot \hat{a}_R = \cos \theta$$

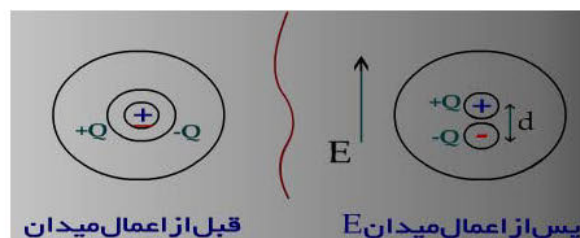
از طرفی می‌دانیم:

بنابراین:

$$R$$

حضور عایق‌ها در میدان الکتریکی ساکن و پلاریزاسیون

در اثر اعمال يك میدان الکتریکی به اتم یا مولکول يك جسم عایق، مرکز بارهای مثبت و مرکز بارهای منفی که قبل از آن بر روی هم قرار داشته‌اند، جابه‌جا می‌شوند. این جابجا شدن با فرض اینکه ساختار فوق خنثی است بصورت يك دو قطبی نمود خواهد کرد $+Q$ (کل بار مثبت) و $-Q$ (کل بار منفی) که فاصله d از هم قرار می‌گیرند. شدت $\vec{E}$ به اندازه‌ای نیست که بارهای منفی که در قید ساختار هستند از آن رها شدند.

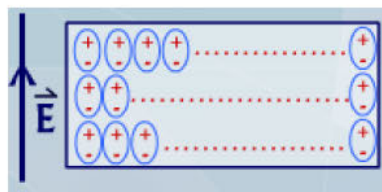


دو نیرو بر هسته $(+Q)$ وارد می‌شود F_{-Q} ناشی از بارهای منفی $(-Q)$ و F_E ناشی از میدان $\vec{E}$ که چون هسته در حال تعادل است بایستی نیروهای فوق به تعادل برسند یعنی:

$$\vec{F}_{-Q} + \vec{F}_E = 0$$

$$F_{-Q} = F_E \Rightarrow Qd = \epsilon_0 \chi_e E \Rightarrow \vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

χ_e ضریب تأثیرپذیری یا حساسیت الکتریکی عایق نامیده می‌شود. (Susceptibility) چنانچه يك قطعه عایق که متشکل از تعداد زیادی اتم یا مولکول آن عایق خواهد بود را در نظر بگیریم که در يك میدان الکتریکی خارجی قرار بگیرد، قطب‌بندی و یا اصطلاحاً پلاریزاسیون اتفاق و یا عبارتی نظم خاصی در ساختار اتمی با مولکولی عایق بوجود می‌آید که ایجاد ممان دو قطبی در آن خواهد کرد.



- چون $\vec{E}$ آنچنان زیاد نیست که الکترون‌ها از قید هسته جدا شوند، تغییر شکل (deform) در عایق رخ نخواهد داد و بارها مقید به ساختار خواهند بود و بهمین دلیل آنها را بارهای مقید Bound charge یا بارهای پلاریزه گویند.
- با قطب‌بندی بارهای مقید، تولید میدان الکتریکی می‌شود در خلاف جهت $\vec{P}$ یا $\vec{E}$ که سبب خواهد شد شدت میدان کل از مقدار اولیه کاهش یابد.

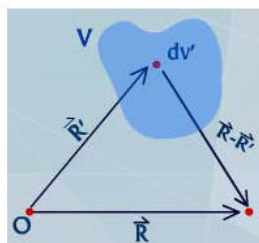
$$\uparrow_{-} \downarrow_{+} \vec{E}_p \uparrow \vec{E}$$

$$\vec{E}_{total} = \vec{E}_p + \vec{E}$$

$$E_{total} = E - E_p < E$$

و این دلیل عمده در بکارگیری عایق‌ها در مواجهه با میدان‌های قوی (ولتاژ زیاد) می‌باشد.

محاسبه پتانسیل و شدت میدان الکتریکی بعلت عایق‌های پلاریزه

ممان در واحد حجم عایق $\vec{P}$ 

$$dV(\vec{R}) = \frac{\vec{P}(\vec{R}') dV' (\vec{R} - \vec{R}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{R} - \vec{R}'|^3}$$

$$V(\vec{R}) = \int_V \frac{\vec{P}(\vec{R}') (\vec{R} - \vec{R}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{R} - \vec{R}'|^3} dV'$$

$$V(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \left\{ \nabla' \cdot \left[\frac{\vec{P}}{|\vec{R} - \vec{R}'|} \right] - \frac{\nabla' \cdot \vec{P}}{|\vec{R} - \vec{R}'|} \right\} dV'$$

$$V(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\vec{P} \cdot d\vec{s}'}{|\vec{R} - \vec{R}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{-\nabla' \cdot \vec{P}}{|\vec{R} - \vec{R}'|} dV'$$

$$V(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\vec{P} \cdot \hat{n} ds'}{|\vec{R} - \vec{R}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{-\nabla' \cdot \vec{P}}{|\vec{R} - \vec{R}'|} dV'$$

$$V(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\vec{P} \cdot d\vec{s}'}{|\vec{R} - \vec{R}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{P dv'}{|\vec{R} - \vec{R}'|}$$

پتانسیل ناشی از توزیع بارهای حجمی و سطحی آزاد:

$$\rho_{Ps} = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

چگالی بار مفید (پلاریزه) سطحی در سطح عایق پلاریزه:

$$\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P}$$

چگالی بار مفید (پلاریزه) حجمی در حجم عایق پلاریزه:

$$V(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\rho_s + \rho_{Ps}}{|\vec{R} - \vec{R}'|} ds' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho + \rho_P}{|\vec{R} - \vec{R}'|} dV'$$

بنابراین:

$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{(\rho_s + \rho_{Ps})(\vec{R} - \vec{R}')}{|\vec{R} - \vec{R}'|^3} ds' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{(\rho + \rho_P)(\vec{R} - \vec{R}')}{|\vec{R} - \vec{R}'|^3} dV'$$

چگالی فلوئید میدان الکتریکی

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V (\rho + \rho_P) dv'$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho + \rho_P}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E}) = \rho - \nabla \cdot \vec{P}$$

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Electric Flux Density

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad \text{و} \quad \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{free} = \int_V \rho dv'$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

اما می‌دانیم که

$$\Rightarrow \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 X_e \vec{E}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 (1 + X_e) \vec{E}, \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

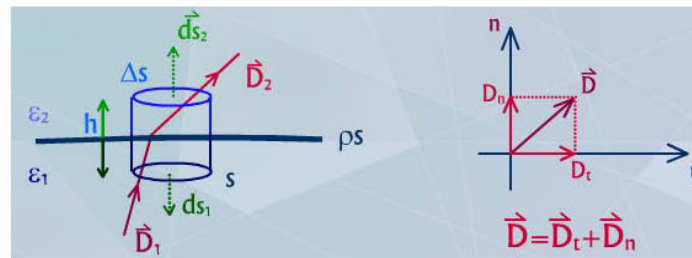
$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + X_e) \quad \text{Absolute Electric Permittivity}$$

ϵ = ضریب نفوذپذیری مطلق عایق

$$\epsilon_r = 1 + X_e \quad \text{Relative Electric Permittivity}$$

ϵ_r = ضریب نفوذپذیری نسبی عایق

شرایط مرزی در سطح مشترک دو محیط Boundary condition



$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int_{s_1} \vec{D}_1 \cdot d\vec{s}_1 + \int_{s_2} \vec{D}_2 \cdot d\vec{s}_2 + \int_{\text{cylindrical}} \vec{D} \cdot d\vec{s}$$

$$\int_{s_1} \vec{D}_1 \cdot d\vec{s}_1 = \int_{s_1} (\vec{D}_{1t} + \vec{D}_{1n}) \cdot d\vec{s}_1 = \int_{s_1} \vec{D}_{1t} \cdot d\vec{s}_1 + \int_{s_1} \vec{D}_{1n} \cdot d\vec{s}_1 = 0 + D_{1n}(-\Delta S) = -D_{1n} \Delta S$$

$$\int_{s_2} \vec{D}_2 \cdot d\vec{s}_2 = \int_{s_2} (\vec{D}_{2t} + \vec{D}_{2n}) \cdot d\vec{s}_2 = 0 + D_{2n}(\Delta S) = D_{2n} \Delta S$$

$$\int_{\text{cylindrical}} \vec{D} \cdot d\vec{s} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

$$\Rightarrow \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = D_{2n} \Delta S - D_{1n} \Delta S$$

چون عایق‌ها کامل فرض شده‌اند:

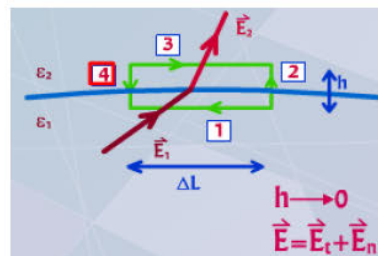
$$Q = \int_V \rho dv' = \int_S \rho_s ds' = \rho_s \Delta S$$

$$(D_{2n} - D_{1n}) \Delta S = \rho_s \Delta S \Rightarrow D_{2n} - D_{1n} = \rho_s$$

$$\text{if } \rho_s = 0 \Rightarrow D_{2n} = D_{1n}$$

$$\epsilon_2 E_{2n} = \epsilon_1 E_{1n}$$

$$\nabla \cdot \vec{P} = -\rho_p \Rightarrow P_{1n} - P_{2n} = \rho_{ps}$$



$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{(1)} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l}_1 + \int_{(2)} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l}_2 + \int_{(3)} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l}_3 + \int_{(4)} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l}_4$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} &= \int_{(1)} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l}_1 + \int_{(2)} \vec{E} \cdot d\vec{l}_2 + \int_{(3)} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l}_3 + \int_{(4)} \vec{E} \cdot d\vec{l}_4 \\ &= E_{1t} \Delta L + 0 + E_{2t} (-\Delta L) + 0 = (E_{1t} - E_{2t}) \Delta L = 0 \end{aligned}$$

$$E_{1t} = E_{2t}$$

$$\frac{D_{1t}}{\epsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\epsilon_2}$$

چنانچه یکی از محیطها هادی باشد با توجه به آنکه در هادی $\vec{P}, \vec{D}, \vec{E}$ صفر است.

(مثلاً محیط اول هادی است)

$$D_{2n} - D_{1n} = \rho_s \quad E_1 = D_1 = P_1 = 0$$

$$\Rightarrow D_{2n} = \rho_s$$

$$E_{2n} = \frac{\rho_s}{\epsilon_2}$$

$$E_{2t} = E_{1t} = 0$$

یعنی در مرز هادیها تنها مؤلفه عمود وجود دارد.

مثال: بار نقطه‌ای +Q در مرکز یک پوسته هادی کروی با شعاع داخلی R_i و شعاع بیرونی

R_o قرار دارد توابع $\vec{E}$ و V را بر حسب فاصله R بدست آورید (محیط مسئله فضای آزاد)

- برای ناحیه $R > R_o$

سطح گاوسی کروی با شعاع R :

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_t}{\epsilon_o}$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = E_1 4\pi R^2$$

با فرض آنکه پوسته هادی خنثی باشد:

$$Q_t = \int \rho dv = Q$$

$$E_1 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_o} \Rightarrow \vec{E}_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o R^2} \hat{a}_R$$

$$V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$V_1(\vec{R}) - V(\infty) = -\int_{\infty}^R \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} = -\int_{\infty}^R \frac{Q}{4\pi\epsilon_o R'^2} \hat{a}_R \cdot \hat{a}_R dR'$$

$$V_1 = \left[\frac{Q}{4\pi\epsilon_o R'} \right]_{\infty}^R = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o R}$$

با فرض $V(\infty) = 0$

- برای ناحیه $R_i < R < R_o$ چون در جسم هادی قرار داریم:

$$E_2 = 0$$

$$V_2 = V_1 \Big|_{R=R_o} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o R_o}$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = E_3 4\pi R^2$$

- برای ناحیه $R < R_i$ سطح گاوسی کروی با شعاع R :

$$Q_t = Q$$

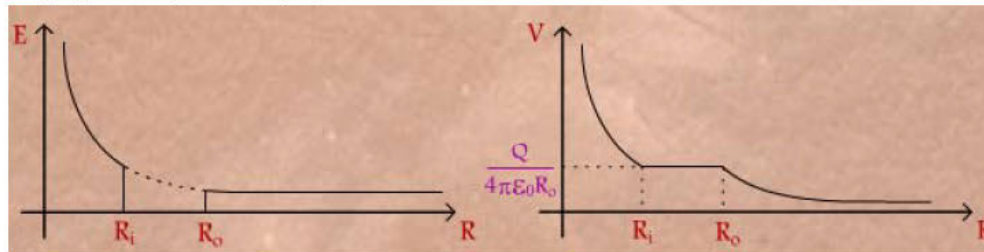
بنابراین

$$E_3 = 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E}_3 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{a}_R$$

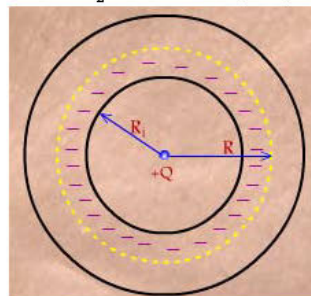
$$V_3 = -\int_{\infty}^R \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_{\infty}^{R_0} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} - \int_{R_0}^R \vec{E}_3 \cdot d\vec{l}$$

$$V_3 = V_2 - \int_{R_0}^R \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R'^2} dR' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_0} + \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R'} \right) \Big|_{R_0}^R$$

$$V_3 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_0} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_0}$$



مثال: برای مثال قبل مطلوبست تعیین بارهای توزیع شده در نقاط مختلف پوسته هادی. با توجه به خنثی بودن هادی و با عنایت به آنکه $E_2 = 0$:



$$\oint \vec{E}_2 \cdot d\vec{s} = \frac{Q_t}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow Q_t = 0 \Rightarrow Q + Q_s = 0$$

$$\Rightarrow Q_s = -Q \Rightarrow \rho_s \Big|_{R=R_i} = -\frac{Q}{4\pi R_i^2}$$

دیدگاه دیگر:

$$D_{2n} - D_{1n} = \rho_s$$

$$R = R_i$$

$$0 - D_1 = P_s \Rightarrow -\epsilon_0 E_1 \Big|_{R=R_i} = \rho_s$$

$$-\frac{Q}{4\pi R_i^2} = \rho_s$$

$$\Rightarrow \rho_s = -\frac{Q}{4\pi R_i^2}$$

بنابراین

$$Q_s \Big|_{R=R_0} = -Q_s \Big|_{R=R_i} = Q$$

$$\rho_s \Big|_{R=R_0} = \frac{Q}{4\pi R_0^2}$$

$$D_3 \Big|_{R=R_0} - D_2 \Big|_{R=R_0} \Rightarrow \frac{Q}{4\pi R_0^2} - 0 = \rho_s \quad \text{و یا :}$$

مثال: چنانچه پوسته کروی مثال قبل از جنس عایق با ثابت عایقی ϵ_r باشد مطلوبست محاسبه $V, \vec{P}, \vec{D}, \vec{E}$ بر حسب فاصله R و نیز تعیین چگالی بارهای پلاریزه.

$R > R_0$:

$$\oint \vec{D}_1 \cdot d\vec{s}_1 = Q_t \Rightarrow D_1 4\pi R^2 = Q \Rightarrow \vec{D}_1 = \frac{Q}{4\pi R^2} \hat{a}_R$$

$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{D}_1}{\epsilon_1} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R^2} \hat{a}_R$$

$$\vec{P}_1 = \vec{D}_1 - \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_1 \vec{E}_1 - \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} - \epsilon_0 \vec{E} = 0$$

$$V_1(R) - V(\infty) = - \int_{\infty}^R \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} = - \int_{\infty}^R \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R'^2} dR' = \left[\frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R'} \right]_{\infty}^R$$

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R}$$

$R_i < R < R_0$:

$$\oint \vec{D}_2 \cdot d\vec{s}_2 = Q_t \Rightarrow D_2 4\pi R^2 = Q \Rightarrow \vec{D}_2 = \frac{Q}{4\pi R^2} \hat{a}_R$$

$$\vec{E}_2 = \frac{\vec{D}_2}{\epsilon_2} = \frac{Q}{4\pi \epsilon R^2} \hat{a}_R$$

$$\vec{P}_2 = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \vec{E}_2 = \frac{Q(\epsilon_r - 1)}{4\pi \epsilon_r R^2} \hat{a}_R$$

$$V_2 = - \int_{\infty}^R \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{\infty}^{R_0} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} - \int_{R_0}^R \vec{E}_2 \cdot d\vec{l}$$

$$V_2 = V_1(R = R_0) - \int_{R_0}^R \frac{Q}{4\pi \epsilon R'^2} dR' = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R_0} + \frac{Q}{4\pi \epsilon R} - \frac{Q}{4\pi \epsilon R_0}$$

$$V_2 = \frac{Q}{4\pi \epsilon R} + \frac{Q}{4\pi R_0} \left(\frac{1}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon} \right)$$

$R < R_i$:

$$\oint \vec{D}_3 \cdot d\vec{s}_3 = Q_t \Rightarrow \vec{D}_3 = \frac{Q}{4\pi R^2} \hat{a}_R$$

$$\vec{E}_3 = \frac{\vec{D}_3}{\epsilon_3} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R^2} \hat{a}_R$$

$$\vec{P}_3 = 0$$

$$V_3 = - \int_{\infty}^R \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{\infty}^{R_i} \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_{R_i}^R \vec{E}_3 \cdot d\vec{l}$$

$$V_3 = V_2(R = R_i) - \int_{R_i}^R \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R'^2} dR'$$

$$V_3 = \frac{Q}{4\pi \epsilon R_i} + \frac{Q}{4\pi R_0} \left(\frac{1}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon} \right) + \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R} - \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R_i}$$

برای محاسبه چگالی بار حجمی پلاریزه در فاصله $R_i < R < R_0$:

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}_2$$

$$\rho_p = -\frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} (R^2 P_2) = -\frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left(\frac{Q(\epsilon_r - 1)}{4\pi\epsilon_r} \right) = 0$$

$$\rho_p \Big|_{R=R_0} = (\vec{P} \cdot \hat{n}) \Big|_{R=R_0} = \vec{P}_2 \Big|_{R=R_0} \cdot \hat{a}_R = \frac{Q(\epsilon_r - 1)}{4\pi\epsilon_r R_0^2} \hat{a}_R \cdot \hat{a}_R$$

$$\rho_p \Big|_{R=R_0} = \frac{Q(\epsilon_r - 1)}{4\pi\epsilon_r R_0^2}$$

$$\rho_p \Big|_{R=R_i} = \vec{P}_2 \Big|_{R=R_i} \cdot \hat{n} \Big|_{R=R_i} = \frac{Q(\epsilon_r - 1)}{4\pi\epsilon_r R_i^2} \hat{a}_R \cdot (-\hat{a}_R) = -\frac{Q(\epsilon_r - 1)}{4\pi\epsilon_r R_i^2}$$

نکته: قدرت تحمل عایق (ماده) را حداکثر شدت میدان الکتریکی اعمالی به عایق بدون آنکه شکست (Breakdown) در مورد عایق رخ ندهد و عبارتی تغییر شکل (ساختار) مولکولی انجام نگیرد. معمولاً این پارامتر را با واحد v/m بیان می‌گردد و مفهوم آن بصورت حداکثر ولتاژ قابل اعمال به قطعه‌ای با ضخامت مشخص بکار می‌رود.

مثلاً قدرت تحمل عایقی هوا (با فشار اتمسفر) $3 \times 10^6 v/m$ است و یا برای میکا Mica با $\epsilon_r = 6$ برابر $200 \times 10^6 v/m$ یا $200 Mv/m$ است، بدین مفهوم که برای یک قطعه از جنس میکا با ضخامت ۱ cm حداکثر

$$V_{\max} = E_{\max} \times d = 200 \times 10^6 \times 10^{-2} = 2 MV$$

۲ مگاولت قابل اعمال به قطعه خواهد بود بدون صدمه رسیدن به آن.

خازن Capacitor

قطعاتی هستند که به مجرد آنکه به ولتاژی (منبعی) متصل شوند (دو جسم هادی که در بین آنها محیط عایقی قرار گرفته) بارهایی روی سطوح این دو جسم جمع می‌شود - بار مثبت روی یکی و بار منفی به همان مقدار روی دیگری. این قطعه انرژی میدان الکتریکی را در خود ذخیره می‌کند. نسبت بار ذخیره شده به اختلاف پتانسیل بین دو جسم هادی آن مقداری است ثابت که به آن ظرفیت گویند (capacitance). این ظرفیت تنها تابع مشخصات فیزیکی قطعه است و نه کمیت‌های الکتریکی مربوطه. مانند یک خازن مسطح با سطح هادی برابر با A که بفاصله d از هم قرار گرفته‌اند و فضای بین آنها از عایقی با ضریب گذردهی ϵ پر شده و

$$c = \frac{\epsilon A}{d} \text{ می‌باشد.}$$

$$C = \frac{Q}{V}$$

$$C = \frac{\oint \vec{D} \cdot d\vec{s}}{-\int \vec{E} \cdot d\vec{l}} = \frac{\int \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{s}}{-\int \vec{E} \cdot d\vec{l}}$$

نحوه محاسبه ظرفیت خازنی

۱ - فرض استقرار بار $+Q$ و $-Q$ مشخص روی دو هادی خازن

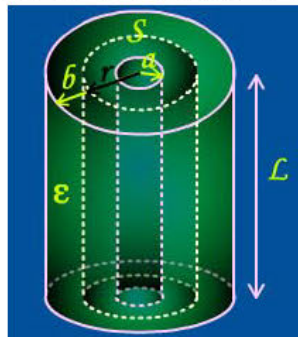
۲ - تعیین D در فضای بین دو هادی از طریق $\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q$

۳ - محاسبه E از طریق $E = \frac{D}{\epsilon}$

۴ - محاسبه V بین دو هادی از طریق $V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$

۵ - جایگزینی V بدست آمده در فرمول $C = \frac{Q}{V}$

مثال: محاسبه ظرفیت خازنی يك خازن استوانه‌اي متشکل از دو استوانه هم محور بطول L و به شعاع‌هاي قاعده a و b ($b > a$) که فضای بین آندو از عایقي (ϵ) پر شده است.



۱ - فرض بار $+Q$ روی استوانه داخلی و $-Q$ روی استوانه بیرونی

۲ - انتخاب سطح گاوسی استوانه‌اي به ارتفاع L و شعاع قاعده $a < r < b$

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = +Q \Rightarrow \vec{D} = \frac{Q}{2\pi L} \hat{a}_r$$

$$E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{Q}{2\pi \epsilon L} \quad - 3$$

$$V_a - V_b = V = -\int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_b^a \frac{Q \hat{a}_r}{2\pi \epsilon r L} \cdot \hat{a}_r dr = \frac{Q}{2\pi \epsilon L} \ln \frac{b}{a} \quad - 4$$

$$\frac{Q}{2\pi \epsilon L \ln \frac{b}{a}} \quad - 5$$

انرژی ذخیره شده الکترواستاتیکی

می‌دانیم که کار لازم برای حرکت یک بار نقطه‌ای Q واقع در میدان الکتریکی از رابطه $W=QV$ که V اختلاف پتانسیل بین نقطه (مکان) انتهایی و ابتدایی بار Q است بدست می‌آید اگر نقطه ابتدایی در بینهایت دور (یا مبدأ پتانسیل صفر در بینهایت) در نظر گرفته باشیم V پتانسیل نقطه نهایی بار Q خواهد بود این میزان کار مذکور بصورت انرژی در سیستم ذخیره می‌شود. حال N بار گسیسته را که در فضایی مستقر شده‌اند را در نظر می‌گیریم، میزان انرژی (کار) ذخیره شده برای استقرار این بارها بقرار زیر محاسبه می‌شود.

ابتدا فرض می‌شود که هیچگونه باری وجود ندارد و بار q_1 را از بینهایت به مکان $\vec{R}_1$ آورده شود.

$$We_1 = 0 \quad \text{برای بار } q_1$$

$$We_2 = q_2 V_{21} \quad \text{برای بار } q_2$$

$$We_3 = q_3 V_{31} + q_3 V_{32} \quad \text{برای بار } q_3$$

$$We_N = q_N V_{N1} + q_N V_{N2} + \dots + q_N V_{N,N-1} \quad \text{و نهایتاً برای آوردن بار } q_N$$

$$\text{بنابراین} \quad We = \sum_{i=1}^N We_i = 0 + q_2 V_{21} + q_3 V_{31} + q_3 V_{32} + \dots + q_N V_{N,N-1}$$

اما از طرفی

$$q_2 V_{21} = q_2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon |\vec{R}_2 - \vec{R}_1|} = q_1 \frac{q_2}{4\pi\epsilon |\vec{R}_1 - \vec{R}_2|} = q_1 V_{12}$$

$$q_i V_{ij} = q_j V_{ji} \quad \text{و بطور کلی}$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$We_2 = q_1 V_{12}$$

$$We_3 = q_1 V_{13} + q_2 V_{23}$$

...

$$We_N = q_1 V_{1N} + q_2 V_{2N} + \dots + q_{N-1} V_{N-1,N}$$

$$\text{کل } We = 0 + q_1 V_{12} + q_1 V_{13} + \dots + q_{N-1} V_{N-1,N} \quad 9$$

چنانچه We کل دو رابطه مربوطه در بالا را با هم جمع کنیم:

$$2We = q_1 V_{12} + q_2 V_{13} + q_1 V_{14} + \dots + q_1 V_{1N} \\ + q_2 V_{21} + q_2 V_{23} + q_1 V_{24} + \dots + q_2 V_{2N}$$

...

$$q_N V_{N1} + q_N V_{N2} + \dots + q_N V_{N,N-1}$$

یا :

$$2We = q_1 (V_{12} + V_{13} + \dots + V_{1N}) \\ + q_2 (V_{21} + V_{23} + \dots + V_{2N}) \\ \dots \\ + q_N (V_{N1} + V_{N2} + \dots + V_{N,N-1})$$

حال اگر V_1 را بصورت $V_1 = \sum_{i=2}^N V_{1i}$ تعریف کنیم که مجموع پتانسیل نقطه $\vec{R}_1$ ناشی تمام منابع $(q_N, \dots, q_3, q_2)$ است و بطور کلی:

$$V_K = \sum_{i=1}^N V_{ki} = \text{پتانسیل نقطه } k \text{ ام ناشی از تمام بارهای موجود به جز } q_k$$

$$2We = q_1 V_1 + q_2 V_2 + \dots + q_N V_N$$

$$We = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i$$

و برای یک توزیع بار پیوسته حجمی به چگالی P

$$We = \frac{1}{2} \int_V \rho(\vec{R}') V(\vec{R}') dV'$$

می توان ثابت کرد که:

$$We = \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \cdot \vec{E} dv'$$

$$We = \frac{1}{2} \int \epsilon E^2 dv' = \frac{1}{2} \int \frac{D^2}{\epsilon} dV' = \frac{1}{2} \int D E dv'$$

نیروی الکترواستاتیک

- برای یک سیستم بسته طبق اصل بقا انرژی

$$\Delta W + \Delta We = 0$$

$$\Delta W = -\Delta We$$

میزان انرژی تغییر یافته بدلیل اعمال نیروی F که سبب جابجائی Δl می شود:

$$\Delta W = F \Delta l$$

$$F = \frac{\Delta W}{\Delta l}$$

$$\Rightarrow F = -\frac{\Delta We}{\Delta l} \Rightarrow \vec{F}|_{Q=cte} = -\nabla We$$

مانند: یک خازن که بار $+Q$ و $-Q$ روی صفحات آن ذخیره شده و اتصالی با بیرون (یک منبع بیرونی) ندارد یعنی Q ثابت است و در نتیجه یک سیستم بسته را بوجود آورده بنابراین:

$$\vec{F}|_{Q=cte} = -\nabla W_e|_{Q=cte} = -\nabla \left(\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \right)$$

$$F_y = F_z = 0, \quad F_x = -\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon} \right) = -\frac{d}{dx} \left(\frac{Q^2 x}{2\epsilon A} \right)$$

$$F_x = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon A}$$

$$\Delta W = \Delta W_e$$

- برای یک سیستم باز

بنابراین

$$\Delta W = F \Delta l \Rightarrow F = \frac{\Delta W}{\Delta l} = \frac{\Delta W_e}{\Delta l}$$

$$\vec{F}|_{V=cte} = \nabla W_e$$

مانند یک خازن که به منبعی با ولتاژ ثابت V متصل گشته است و هر تغییر در انرژی موجود از منبع تأمین می‌شود.

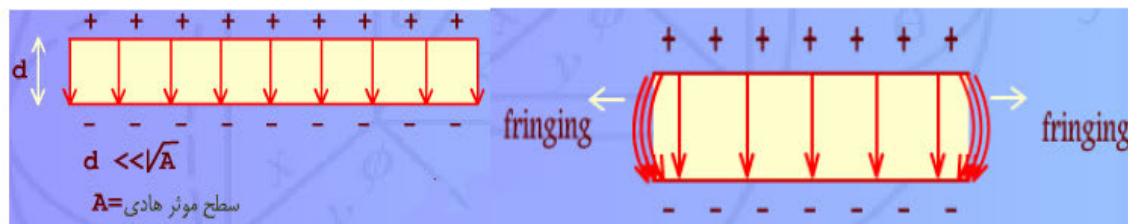
$$\vec{F}|_{V=cte} = \nabla W_e = \nabla \left(\frac{1}{2} \epsilon V^2 \right) \quad C = \epsilon \frac{A}{x}$$

$$F_x = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (\epsilon V^2) = \frac{V^2}{2} \frac{d}{dx} \left(\epsilon \frac{A}{x} \right) = \frac{V^2}{2} \left[-\frac{\epsilon A}{x^2} \right]$$

$$F_x = -\frac{1}{2} V^2 \frac{\epsilon^2 A^2}{x^2 \epsilon A} = -\frac{1}{2} \frac{V^2 C^2}{\epsilon A} = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon A}$$

که همان جواب حالت قبل است.

نکته: در خصوص وضعیت خطوط میدان در یک خازن چنانچه فاصله بین دو هادی نسبت به سایر ابعاد خازن کوچک نباشد، میدان در فضاهای بین دو هادی یکنواخت نخواهد بود و میدان در رفتگی پیدا خواهد کرد یعنی خطوط میدان در نقاط کناری نسبت به نقاط میانی قطعه (خازن) انحراف خواهد داشت که به این می دان (Fringing Field) گویند (فوران میدان)



فصل سوم

حل مسائل الکترواستاتیک Solution of Electrostatic problems

تاکنون سه روش محاسبه شدت میدان الکترواستاتیکی (حل مسئله میزان الکتریکی ساکن) در فصل قبل ارائه و بررسی گردید. در این فصل روش‌ها و تکنیک‌های دیگری ارائه می‌شود.

معادلات لاپلاس و پواسون

$$\nabla_0 \vec{E} = \rho / \epsilon$$

$$\vec{E} = -\nabla V$$

$$\nabla_0 (-\nabla V) = \rho / \epsilon$$

$$\nabla_0 (\nabla V) = -\rho / \epsilon$$

$$\nabla^2 V = -\rho / \epsilon$$

معادله پواسون Poisson Equation

(معادله دیفرانسیل درجه ۲ ولتاژ ناهمگن)

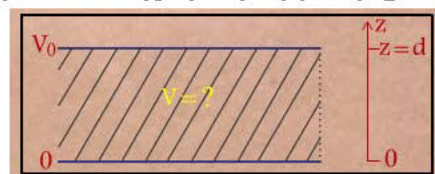
چنانچه در محیط مورد نظر که V مجهول می‌باشد و در صدد محاسبه آن هستیم $\rho = 0$ باشد.

$$\nabla^2 V = 0$$

معادله لاپلاس Laplace Equation

(معادله دیفرانسیل درجه ۲ ولتاژ همگن)

مثال: مطلوبست محاسبه تابع پتانسیل بین صفحات یک خازن بنحوی که پتانسیل صفحه پایین صفر و صفحه بالا در پتانسیل V_0 قرار دارد. از فوران میدان در لبه خازن صرف‌نظر می‌شود.



$$\nabla^2 V = 0$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

$$\frac{d^2 V}{dz^2} = 0 \Rightarrow \frac{dV}{dz} = c_1 \Rightarrow dV = c_1 dz \Rightarrow V = c_1 z + c_2$$

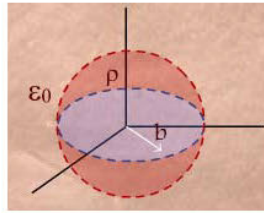
$$z = 0 \Rightarrow V = 0 \Rightarrow V(z = 0) = c_1(0) + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$z = d \Rightarrow V = V_0 \Rightarrow V(z = d) = c_1(d) + c_1 = V_0 \Rightarrow c_1 = \frac{V_0}{d}$$

$$V(x, y, z) = \frac{V_0}{d} z$$

بنابراین:

مثال: چنانچه بار حجمی پیوسته‌ای به چگالی b



$$R < b: \quad \rho = 0$$

$$\nabla^2 V_1 = 0, \quad \frac{\partial V_1}{\partial \varphi} = \frac{\partial V_1}{\partial \theta} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} (R^2 \frac{dV_1}{dR}) = 0$$

$$\frac{d}{dR} (R^2 \frac{dV_1}{dR}) = 0$$

$$R^2 \frac{dV_1}{dR} = c_1$$

$$\frac{dV_1}{dR} = \frac{c_1}{R^2} \rightarrow \vec{E} = -\nabla V \Rightarrow E_1 = -\frac{dV_1}{dR} = -\frac{c_1}{R^2}$$

$$dV_1 = \frac{c_1}{R^2} dR$$

$$V_1 = -\frac{c_1}{R} + c_2$$

b

$$R = b : V_1 = V_2 \Rightarrow -\frac{C_1}{b} = -\frac{\rho_0 b^3}{12\epsilon_0 b} + C'_2$$

همچنین با توجه به آنکه $\epsilon_1 = \epsilon_2$ در نتیجه:

$$(E_1 = E_2)|_{R=b} \Rightarrow -\frac{c_1}{b} = -\frac{\rho_0 b^2}{4\epsilon_0 b} \Rightarrow c_1 = -\frac{\rho_0 b^3}{4\epsilon_0}$$

$$c'_2 = -\frac{c_1}{b} + \frac{\rho_0 b^2}{12\epsilon_0} = \frac{\rho_0 b^2}{3\epsilon_0}$$

و نهایتاً:

در نتیجه:

$$\begin{cases} V_1 = \frac{\rho_0 b^3}{4\epsilon_0 R} \\ \vec{E}_1 = \frac{\rho_0 b^3}{4\epsilon_0 R^2} \hat{a}_R \\ V_2 = -\frac{\rho_0 R^3}{12\epsilon_0 b} + \frac{\rho_0 b^2}{3\epsilon_0} \\ \vec{E}_2 = \frac{\rho_0 R^2}{4\epsilon_0 b} \hat{a}_R \end{cases}$$

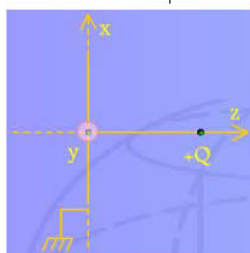
توجه: در انتخاب معادله پواسون یا معادله لاپلاس این نکته حائز اهمیت است که تابع V مجهول ناحیه ای که در صدد یافتن (حل) آن هستیم، تعیین کننده خواهد بود یعنی اگر در آن ناحیه $\rho = 0$ باشد معادله لاپلاس و در غیر انصورت معادله پواسون مطرح خواهد شد و سایر نواحی در این انتخاب دخیل نمی باشند و تأثیرات سایر نواحی در شرایط مرزی در حل معادله دیفرانسیلی لحاظ خواهد شد.

روش تصاویر Images Method

در یک محیط که شامل یک توزیع بار مشخص در مقابل یک جسم هادی باشد می توان از این روش برای یافتن تابع پتانسیل استفاده نمود به نحوی که از طریق استقرار یک بار مجازی بنام بار تصویری بتوان جسم هادی را حذف نمود و مسئله را تبدیل به فضای خالی از جسم هادی کرد تا براحتی بتوان پتانسیل را صرفاً با در نظر گرفتن بار اصلی (حقیقی) و بار مجازی (تصویری) محاسبه نمود. در این روش جسم هادی همانند یک سیستم آینه عمل کرده و تصویر بار حقیقی بصورت یک بار تصویری در مسئله ظاهر می شود.

مثال: بار نقطه ای در مقابل صفحه هادی بینهایت، زمین شده. صفحه در موقعیت

$$\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ d \end{matrix} \quad \begin{matrix} | \\ | \\ +Q \end{matrix}$$



در ناحیه $z \leq 0$:

$$\nabla^2 V = 0$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

اما با توجه به نامحدود بودن صفحه هادی و تقارن موجود

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

$$\nabla^2 V = \frac{d^2 V}{dz^2} = 0 \Rightarrow V = c_1 z + c_2$$

بنابراین:

اما:

$$V(z=0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$V(z \rightarrow \infty) \neq \infty \Rightarrow c_1 = 0$$

$$V|_{z \leq 0} = 0$$

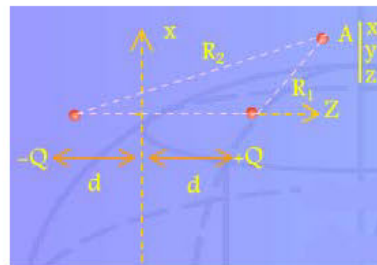
در نتیجه:

پس جواب ناحیه $z \leq 0$ مشخص است و روش تصاویر را صرفاً برای خارج از این ناحیه بکار می بریم اما در ناحیه $z > 0$:

چنانچه تصویر بار $+Q$ در صفحه هادی بینهایت بدست آوریم بار تصویری آن به میزان $q = -Q$ و در

موقعیت $\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{matrix}$ مستقر می شود.

بنابراین با استقرار $-Q$ در $z = -d$ ، جسم هادی را حذف می کنیم.



$$V(x, y, z) = |_{z=0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{+Q}{R_1} + \frac{-Q}{R_2} \right]$$

اما

$$R_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}$$

$$R_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}$$

$$V|_{z \geq 0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}} \right]$$

یعنی:

که معادله تأیید کننده حفظ شرایط مسئله در زمان قبل از حذف هادی و استقرار بار مجازی $-Q$ می باشد چون:

$$V(z=0) = 0$$

محاسبه شدت میدان

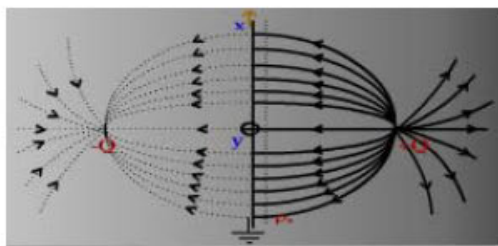
$$\vec{E}|_{z>0} = -\nabla V = \left[\frac{\partial V}{\partial x} \hat{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{a}_z \right]$$

برای تعیین چگالی بار سطحی القاء شده بر روی صفحه هادی

$$\rho_s = D_n|_{z=0} = \epsilon_0 E_n = \epsilon_0 E_z|_{z=0}$$

$$E = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-2(z-d)}{2[x^2 + y^2 + (z-d)^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{-2(z+d)}{2[x^2 + y^2 + (z+d)^2]^{\frac{3}{2}}} \right]$$

$$E_z|_{z=0} = \frac{+2Q}{4\pi\epsilon_0 [x^2 + y^2 + d^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{Qd}{2\pi\epsilon_0 (r^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}$$



بنابراین

$$\rho_s = -\frac{Qd}{2\pi(r^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$r=0 \Rightarrow \rho_s \text{ is max}$$

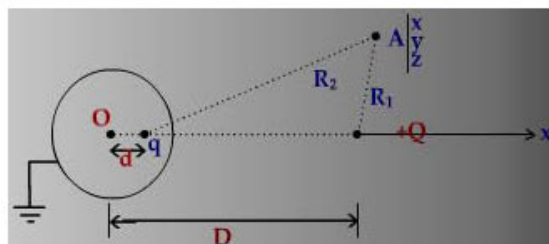
$$r \rightarrow \infty \Rightarrow \rho_s \rightarrow 0$$

کل بار توزیع شده روی صفحه هادی

$$q = \int \rho_s ds$$

$$q = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{-Qd}{2\pi[r^2 + d^2]^{\frac{3}{2}}} r dr d\phi = -Q$$

مثال: بار نقطه ای در مقابل کره هادی زمین شده به شعاع a و به فاصله D از مرکز کره



موقعیت +Q در $\begin{cases} 0 \\ 0 \\ D \end{cases}$ مرکز کره در مبدأ مختصات قرار دارد.

برای حذف هادی باید بار تصویر q در موقعیت $\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ d \end{matrix}$ در نظر گرفت به نحوی که

$$V(R=a)=0$$

پتانسیل در ناحیه $R \leq a$:

$$\nabla^2 V = 0 \Rightarrow \frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{dV}{dR} \right) = 0$$

$$\Rightarrow V = -\frac{C_1}{R_1} + C_2$$

$$V(R=0)=0 \Rightarrow C_1=0$$

$$V(R=a)=0 \Rightarrow C_2=0$$

$$V|_{R \leq a} = 0$$

بنابراین:

اما برای ناحیه $R > a$:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{R_1} + \frac{q}{R_2} \right]$$

$$R_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-D)^2}$$

$$R_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}$$

$$V = \left|_{R \geq a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-D)^2}} + \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} \right] \right.$$

با توجه به آنکه باید $V(R=a)=0$ شود بنابراین برای یافتن دو مجهول q و d با اعمال $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ در رابطه اخیر می توان q و d بقرار زیر بدست آورد:

$$d = \frac{a^2}{D}, \quad q = -\frac{a}{D}Q$$

$$d = \frac{a^2}{D} < a$$

واضح است که

$$\frac{a}{D} < 1 \Rightarrow |q| < Q$$

یعنی q در داخل کره مستقر است و

یعنی بار تصویر از بار اصلی کوچکتر و مخالف علامت Q است.

نکته: می توان برای حل برخی از مسائل مشابه، از دیدگاه آینه ها و سیستم نوری بهره جست بعبارتی بارهای تصویری را از طریق سیستم آینه تعیین کرد و سپس هادی را حذف نمود و محیط را بدون اجسام هادی بررسی و پارامترها را بدست آورد.

مسائل مقدار مرزی Boundary value problems

در این قسمت به حل معادله لاپلاس از دیدگاه ریاضی یعنی حل معادله دیفرانسیل درجه ۲ همگن از طریق روش متغیر جدا (Separation variable) می پردازیم به این مفهوم که $\nabla^2 V$ که شامل مشتقات جزئی مرتبه دوم هر سه متغیر در هر دستگاه مختصات است را با در نظر گرفتن آنکه تابع مجهول V معادل حاصل ضرب سه تابع تک متغیره می باشد در صدد یافتن آنها

خواهیم شد. حل مسئله فوق در فضائی است که توزیع بار تنها روی سطوح (مرزهای) محدود کننده آن فضا قرار دارد و پتانسیل در ناحیه بدون بار صدق می کند.

بعنوان مثال در دستگاه مختصات مستطیلی

$$V(x, y, z) = ?$$

$$\nabla^2 V = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

$$V(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \quad , \quad X(x) = ? \quad , \quad Y(y) = ? \quad , \quad Z(z) = ?$$

با جایگزین V فوق در معادله لاپلاس

$$YZ \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + XZ \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + XY \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = 0$$

با تقسیم طرفین بر تابع XYZ که در کلیه نقاط فضای مورد نظر مخالف صفر است خواهیم داشت:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \text{مقدار ثابت} & = K_x^2 \\ \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \text{مقدار ثابت} & = K_y^2 \\ \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \text{مقدار ثابت} & = K_z^2 \end{cases}$$

$$K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = 0$$

با شرط:

بسته به آنکه K^2 ها مثبت، منفی و یا صفر باشند جوابهای هر یک از سه معادله دیفرانسیل درجه ۲ همگن تک متغیره بصورت زیر خواهد بود:

$$\frac{1}{f(\alpha)} \frac{d^2 f(\alpha)}{d\alpha^2} = k_\alpha^2 \quad (\alpha = x, y, z \quad ; \quad X, Y, Z)$$

$$\text{if } k_\alpha^2 = 0 \Rightarrow f(\alpha) = A\alpha + B$$

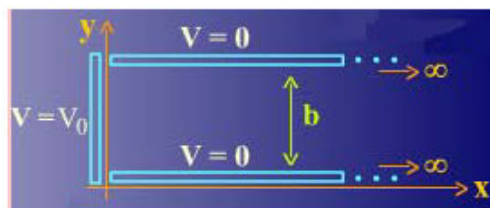
$$\text{if } k_\alpha^2 > 0 \Rightarrow f(\alpha) = Ae^{k_\alpha \alpha} + Be^{-k_\alpha \alpha} \text{ یا } A \sinh(k_\alpha \alpha) + B \cosh(k_\alpha \alpha)$$

$$\text{if } k_\alpha^2 < 0 \Rightarrow f(\alpha) = A \sin(k_\alpha \alpha) + B \cos(k_\alpha \alpha)$$

برای یافتن ضرایب ثابت از مقادیر (شرایط) مرزی هر جهت استفاده می شود بنابراین برای یک مسئله کامل سه بعدی با توجه به آنکه معادله دیفرانسیل درجه ۲ است نیازمند ۶ شرط مرزی خواهیم بود.

انتخاب هر یک از حالات فوق بستگی به ساختار مسئله باشد؛ چنانچه در پاسخ ها تکرار صفر در جهت خاصی وجود داشته باشد از توابع پریودیک استفاده می شود- چنانچه دامنه متغیر در جهتی نامحدود باشد استفاده از توابع نمائی مناسب تر خواهد بود.

مثال: شکل زیر سطح مقطع ساختاری متشکل از سه هادی (دو نیم صفحه بینهایت و موازی که در یک طرف آن هادی سوم قرار دارد) نشان می دهد (در جهت z نامحدودند) پتانسیل دو صفحه موازی صفر و پتانسیل صفحه کناری برابر V_0 است. مطلوبست توزیع پتانسیل در ناحیه محصور شده بوسیله صفحات.



$$\nabla^2 V = 0$$

چون در امتداد Z سطوح هادی نامحدودند بنابراین V مستقل از Z است.

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad v(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0 \quad (k_z = 0) \Rightarrow Z(z) = Az + B \Rightarrow Z = B \equiv 1$$

$$V(y=0) = V(y=b) = 0 \Rightarrow Y(y=0) = Y(y=b) = 0$$

بنابراین در جهت y تابع بتانسیتیل بریودیک می باشد.

$$\frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = k_y^2 < 0 \Rightarrow Y(y) = c \sin(k_y y) + D \cos(k_y y)$$

$$Y(y=0) = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$Y(y=b) = 0 \Rightarrow Y = c \sin(k_y b) = 0 \Rightarrow k_y b = n\pi$$

$$k_y = \frac{n\pi}{b} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$k_x^2 + k_y^2 = 0 \Rightarrow k_x^2 = -k_y^2$$

اما

$$k_y^2 < 0 \Rightarrow k_x^2 > 0 \Rightarrow X(x) = E \sinh\left(\frac{n\pi}{b} x\right) + F \cosh\left(\frac{n\pi}{b} x\right)$$

$$X(x) = E e^{\frac{n\pi}{b} x} + F e^{-\frac{n\pi}{b} x}$$

یا:

$$X|_{x \rightarrow \infty} = 0 \Rightarrow E = 0$$

$$V(x, y, z) = B F C e^{-\frac{n\pi}{b} x} \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \equiv G e^{-\frac{n\pi}{b} x} \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$$

بنابراین:

بدلیل خطی بودن معادلات دیفرانسیل، ترکیب خطی تمامی جوابها به ازاء n های مختلف می

تواند جواب $V(x, y, z)$ باشد یعنی:

$$V(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{n\pi}{b} x} \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$$

آخرین ضرب مجهول را با اعمال آخرین شرط مرزی بدست می آید:

$$V|_{x=0} = V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^0 \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$$

ضرائب A_n ها از دو طریق قابل محاسبه هستند: سری فوریه و استفاده از متعامد

بودن توابع مثلثاتی یعنی:

$$\int_0^b \sin \frac{n\pi}{b} y \sin \frac{m\pi}{b} y dy = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ b/2 & m = n \end{cases}$$

بنابراین طرفین آخرین معادله را اگر در $\sin \frac{m\pi}{b} y$ ضرب نموده و انتگرال گرفته شود:

$$\int_0^b V_0 \sin \frac{m\pi}{b} y \, dy = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^a \sin \frac{n\pi}{b} y \sin \frac{m\pi}{b} y \, dy$$

طرف دوم تنها در حالت $m=n$ مقدار غیر صفر دارد.

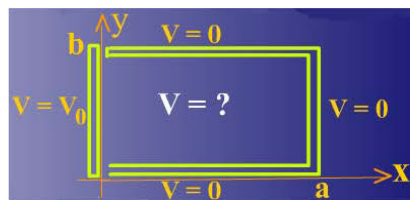
$$V_0 \left[\frac{-b}{m\pi} \cos \frac{m\pi}{b} y \right]_0^b = A_m \frac{b}{2}$$

$$A_m = \frac{2V_0}{m\pi} [1 - \cos m\pi]$$

$$A_m = \begin{cases} \frac{4V_0}{m\pi} & \text{فرد } m \\ 0 & \text{زوج } m \end{cases}$$

$$V(x, y, z) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\frac{n\pi}{b}x} \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad \text{بنابراین:}$$

مثال: چنانچه سطح مقطع ساختار مثال قبل در جهت x باشد مطلوبست محاسبه تابع پتانسیل در داخل فضای محصور شده چهار هادی فوق (در جهت z نامحدود است)



$$V(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

$$K_z = 0 \Rightarrow Z(z) = \text{cte} \equiv 1$$

$$Y(y=0) = Y(y=b) = 0 \Rightarrow Y(y) = c \sin \frac{n\pi}{b} y \quad K_y = \frac{n\pi}{b}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$k_x^2 + k_y^2 = 0 \Rightarrow k_x^2 > 0 \Rightarrow X(x) = E e^{k_y x} + F e^{-k_y x}$$

با:

$$X(x) = E \sinh(k_y x) + F \cosh(k_y x)$$

$$X(x=a) = 0 \Rightarrow E \sinh(k_y a) = -F \cosh(k_y a)$$

$$F = -E \frac{\sinh(k_y a)}{\cosh(k_y a)} \Rightarrow X(x) = P \sinh[k_y (x-a)]$$

$$V(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh\left[\frac{n\pi}{b}(x-a)\right] \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$V(x=0) = V_0 \Rightarrow A_n = \begin{cases} -\frac{4V_0}{n\pi \sinh\left(\frac{n\pi}{b}a\right)} & \text{فرد } n \\ 0 & \text{زوج } n \end{cases}$$

در مختصات استوانه ای:

$$V(r, \phi, z) \equiv R(r)\phi(\phi)Z(z)$$

توابع تک متغیره Z, ϕ, R بسته به ساختار مسئله و تقارن های موجود در آن بصورت های زیر می توانند بدست آیند.

$$R(r): \begin{cases} r^{+n}, r^{-n} \\ \ell n r \\ BesselFunctions: J_n(k_z r), Y_n(k_z r) \end{cases}$$

$$\phi(\phi): \begin{cases} \sin n\phi, \cos n\phi \\ e^{jn\phi}, e^{-jn\phi} \end{cases}$$

$$Z(z): \begin{cases} \sin(k_z z), \cos(k_z z) & \text{اگر } k_z^2 < 0 \\ e^{k_z z}, e^{-k_z z} & \text{اگر } k_z^2 > 0 \end{cases}$$

n, k_z مربوط به معادلات دیفرانسیل درجه ۲ توابع تک متغیره بترتیب برای تابع z و تابع ϕ است.

در مختصات کروی:

$$V(R, \theta, \phi) = G(R)H(\theta)\phi(\phi)$$

حالات ممکنه:

$$G(R): \begin{cases} R^m, R^{-(m+1)} \end{cases}$$

$$H(\theta): \begin{cases} LegendreFunctions: P_m^n(\cos \theta), Q_m^n(\cos \theta) \end{cases}$$

$$\phi(\phi): \begin{cases} \sin n\phi, \cos n\phi \end{cases}$$

فصل چهارم

جریان های الکتریکی ماندگار (مستقیم) در محیط های هادی

Steady Electric current

ملاحظه گردید که میدان الکتریکی ساکن یک میدان پایستار است یعنی:

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

(و نیز رابطه $\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$ که اختلاف پتانسیل را محاسبه می کند مستقل از مسیر است و متناسب با انرژی و کار لازم در میدان) اما $\nabla \times \vec{E} = 0$ نشان دهنده آنست که در یک مسیر بسته هیچگونه تبادل انرژی صورت نمی گیرد. بنابراین میدان الکتریسیته ساکن قادر به ایجاد جریان دائم نخواهد بود که در آن در اثر عبور بار در هادی تلفات ایجاد شود پس برای داشتن جریان دائم به میدان غیر کنسرواتو (ناپایستار) است. جریان دائم همیشه با تلفات انرژی همراه است.

نکته و یادآوری: میدان الکتریکی در داخل اجسام هادی صفر است و این به خاطر آنست که بارهای الکتریکی روی سطح آنها بنحوی جمع می شوند که میدان را صفر می گردانند.

چگالی جریان الکتریکی

اگر N چگالی الکترون های آزاد یا تعداد الکترون های آزاد در هر متر مکعب در یک نقطه از جسم هادی باشند و هر بار منفرد Q کولمب با سرعت متوسط $\vec{v}/s$ در حرکت باشد، $\vec{J}$ چگالی جریان در آن نقطه بقرار زیر بدست می آید:

$$\vec{J} = NQ\vec{v}$$

با توجه به آنکه واحد N برابر $(\text{تعداد حامل} / m^3)$ و واحد Q برابر $(\text{کولمب} / \text{حامل})$ و واحد سرعت برابر m/sec بنابراین واحد $\vec{J}$:

$$\frac{C/sec}{m^2} = \text{Amp} / m^2$$

یعنی $\vec{J}$ مقدار بار الکتریکی است که از یک سطح یک متر مربعی که عمود بر بردار $\vec{v}$ است در مدت یک ثانیه می گذرد. اگر $Q < 0$ باشد $\vec{J}$ با $\vec{v}$ در خلاف هم و اگر $Q > 0$ باشد این دو هم جهت هستند.

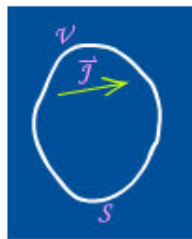
$$I = \int_s \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

جریان کل:

واحد I آمپر است و برابر با کل بار الکتریکی است که در مدت یک ثانیه از سطح مورد نظر می گذرد و یک کمیت اسکالر است.

اصل بقاء بار الکتریکی

بارهای الکتریکی را نمی توان ایجاد کرد و یا از بین برد.
شکل ریاضی این اصل:



در خصوص یک سطح بسته S (دارای حجم V) در یک هادی
کل جریان وارد سطح بسته S می شود $-\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$
اگر این انتگرال مثبت باشد میزان بار در داخل سطح در حال افزایش است و برعکس.
یعنی رابطه فوق سرعت تغییرات بار یعنی $\frac{\partial Q}{\partial t}$ را نشان می دهد.

$$-\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (\text{شکل انتگرالی اصل بقاء و بار})$$

$$-\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dv'$$

$$-\int_V \nabla \cdot \vec{J} dv' = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv' \Rightarrow \int_V \left(\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dv' = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{شکل دیفرانسیلی اصل بقاء و بار})$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (\text{دیورژانس } \vec{J} \text{ نشان دهنده شروع و یا ختم بردار } \vec{J} \text{ است})$$

اگر جریانهای یکنواخت بدون تغییرات زمانی وجود داشته باشد:
یعنی خطوط جریانهای مستقیم خطوط بسته ای هستند که نقطه شروع و نقطه ختم خاصی ندارند.

اگر رابطه فوق برای یک نقطه اعمال شود قانون جریان کریشف را نتیجه می دهد: $\sum_i I_i = 0$

قانون اهم و میدان الکتریکی غیر کنسرواتیو (ناپایستار)

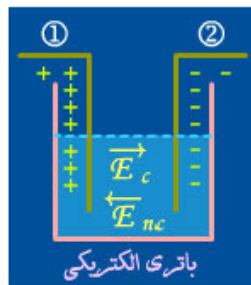
در فرآیند جریان الکتریکی دائم (مستقیم) که با تلفات حرارتی همراه است، هر الکترون (بار) که در این جریان شرکت می کند، به ازاء هر بار که مدار کامل (مسیر بسته) را طی می کند مقدار معینی انرژی دریافت می کند.

میدانهای پایستار به تنهایی قادر به ایجاد جریان دائم نیستند و برای این منظور نیازمند به میدان خاصی است مانند پیل الکتریکی، که در آن هم میدان پایستار و هم ناپایستار تولید می شود.

فعل و انفعال شیمیایی $\Leftarrow$ میدان ناپایستار (در خارج پیل یا در داخل مدار) $\vec{E}_{\text{ش}}$
تجمع بارهای الکتریکی $\Leftarrow$ میدان پایستار $\vec{E}_e$

اگر مدار باز باشد، در داخل پیل $E_{nc} = E_c$ (اما در خلاف جهت یکدیگر) چون هیچ جریان از بارها وجود ندارد و نیروئی به آن وارد نمی شود (تبادل)

$$\vec{E}_{nc} + \vec{E}_c = 0$$



$\vec{E}_{nc}$ باعث حرکت (تجمع) بار مثبت روی الکترود (۱) و تجمع بار منفی روی الکترود (۲) می گردد
 $\vec{E}_c$ ناشی از میدان الکتریکی از طرف بار مثبت به سمت بار منفی است.

بنابراین

$$V = - \int_2^1 \vec{E}_c \cdot d\vec{l} = \int_2^1 \vec{E}_{nc} \cdot d\vec{l} = \text{electromotive Force} \equiv \text{emf} \quad (\text{نیروی محرکه الکتریکی})$$

در داخل منبع

با واحد ولت

اما از طرفی در مدار بسته

$$\oint \vec{E}_c \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\int_1^2 \vec{E}_c \cdot d\vec{l} + \int_2^1 \vec{E}_{nc} \cdot d\vec{l} = 0$$

خارج منبع داخل منبع

$$\int_1^2 \vec{E}_c \cdot d\vec{l} - \int_2^1 \vec{E}_{nc} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \int_1^2 \vec{E}_c \cdot d\vec{l} - V = 0$$

خارج از منبع

$$V = \text{emf} = \int_1^2 \vec{E}_c \cdot d\vec{l} = V_1 - V_2$$

- قانون اهم یک قانون تجربی است:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

($\vec{J}$ با $\vec{E}$ در هر محیط هادی متناسب است)

بطریقی که:

$$\vec{J} = NQ\vec{V}$$

$$\vec{V} = \mu \vec{E}$$

μ ضریب تحرک (mobility)

$$\vec{J} = NQ\mu \vec{E}$$

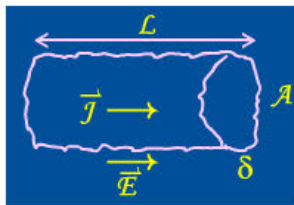
$$\vec{J} = \rho \mu \vec{E}, \quad \sigma = \rho \mu$$

σ ضریب هدایت محیط (هدایت ویژه) conductivity

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \quad \mu = \frac{\sigma}{\rho}$$

ρ چگالی بار

- شکل دیگر قانون اهم:



$$I = \int_s \vec{J} \cdot d\vec{s} = \sigma EA$$

$$V = \int_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = EL \Rightarrow E = \frac{V}{L}$$

$$I = \sigma \frac{V}{L} A \Rightarrow I = \frac{V}{L/\sigma A} = \frac{V}{R} \quad V = RI \quad R = \frac{L}{\sigma A}$$

- محاسبه مقاومت الکتریکی (Resistance)

همانگونه که ملاحظه شد، نسبت اختلاف پتانسیل بین دو سطح از قطعه هادی به جریان عبور کرده از آن سطوح را مقاومت گویند، بنابراین:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{-\int_L \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\oint_s \vec{J} \cdot d\vec{s}} = \frac{-\int_L \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\oint_s \sigma \vec{E} \cdot d\vec{s}}$$

اما از طرفی

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s}}{-\int_L \vec{E} \cdot d\vec{l}} = \frac{\oint_s \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{s}}{-\int_L \vec{E} \cdot d\vec{l}}$$

$$RC = \frac{\epsilon}{\sigma}$$

چنانچه طرفین دو رابطه فوق در هم ضرب شود:

[در صورتیکه ϵ, σ مستقل از مختصات باشند (محیط همگن) و یا وابستگی به مختصات برای دو یکسان باشد، چه در غیر اینصورت رابطه فوق قابل اعمال نیست.]
بنابراین روشهای محاسبه مقاومت الکتریکی:

$$1) R = \frac{-\int_L \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\oint_s \sigma \vec{E} \cdot d\vec{s}}$$

با یافتن $\vec{E}$ در محیط:

$$2) R = \frac{\epsilon}{\sigma C}, \quad G = \frac{\sigma C}{\epsilon} = \frac{1}{R}$$

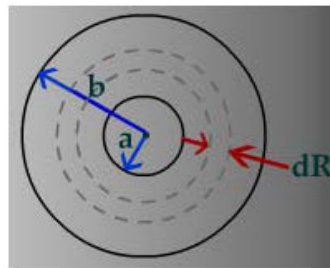
با وجود شرط ذکر شده در بالا:

با تکیه بر ساختار دیفرانسیلی مقاومت و یا کنداکناس (هدایت الکتریکی)

$$3) dR = \frac{dl}{\sigma s} \Rightarrow R = \int dR = \int \frac{dl}{\sigma s}$$

$$dG = \frac{\sigma ds}{\ell} \Rightarrow G = \int dG = \int \frac{\sigma ds}{\ell}$$

مثال: مطلوبست محاسبه مقاومت بین دو کره متحدالمركز بشعاع های a و b ($b > a$) که فضای بین دو کره از جسمی با ضریب هدایت σ پر شده است.



در مختصات کروی مقاومت یک پوسته کروی به شعاع R از جنس δ و با سطح S و ضخامت dR

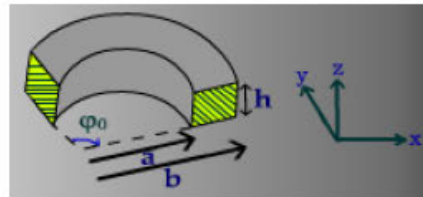
$$dR = \frac{dl}{\sigma S}$$

$$dl = dR$$

$$S = 4\pi R^2$$

$$dR = \frac{dR}{\sigma 4\pi R^2} \Rightarrow R = \int_a^b dR \int \frac{dR}{4\pi \sigma R^2} = \left[\frac{-1}{4\pi \sigma R} \right]_a^b = \frac{b-a}{4\pi \sigma ab}$$

مثال: مطلوبست محاسبه مقاومت قسمتی از یک وایر (استوانه ای به ارتفاع h) مطابق شکل که از هادی با ضریب هدایت σ ساخته شده است (منظور مقاومت بین دو سطح هاشور خورده است)



چنانچه بین دو سطح مذکور اختلاف پتانسیل V_0 متصل گردد:

$$\nabla^2 V = 0$$

$$\frac{d^2 V}{d\varphi^2} = 0$$

$$V = c_1 \varphi + c_2$$

$$\begin{cases} V(\varphi = 0) = 0 & \Rightarrow c_2 = 0 \\ V(\varphi = \varphi_0) = V_0 & \Rightarrow c_1 = \frac{V_0}{\varphi_0} \end{cases}$$

بنابراین:

$$V = \frac{V_0}{\varphi_0} \varphi$$

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{1}{r} \frac{dV}{d\varphi} \hat{a}_\varphi = -\hat{a}_\varphi \frac{V_0}{\varphi_0 r}$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = -\frac{\sigma V_0}{\varphi_0 r} \hat{a}_\varphi$$

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{s} = \int_0^h \int_a^b \left(-\hat{a}_\phi \frac{\sigma V_0}{\varphi_0 r} \right) \cdot (-\hat{a}_\phi) dr dz \quad d\vec{s} = -\hat{a}_\phi dr dz$$

$$I = + \frac{\sigma V_0 h}{\varphi_0} \ln \frac{b}{a}$$

$$R = \frac{V_0}{I} = \frac{\varphi_0}{\sigma h \ln \frac{b}{a}}$$

قانون زول

می دانیم که جریان الکتریکی دائم، با تلفات همراه است. در این قسمت هدف محاسبه تلفات یک محیط هادی با جریان دائم است.

$$P = \frac{\Delta w}{\Delta t} = \frac{F \Delta l}{\Delta t} = QE V, \quad \frac{\Delta l}{\Delta t} = V, \quad F = QE$$

$$p = NQE V = EJ \quad \text{کل در واحد حجم}$$

$$J = NQV \quad \text{و چون}$$

$$p = \vec{E} \cdot \vec{J} \quad \text{w/m}^3$$

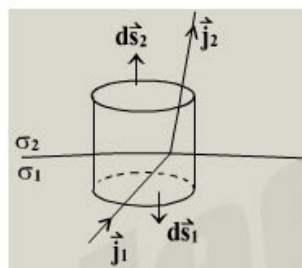
چگالی توان (توان در واحد حجم)

$$dv = ds dl \quad \text{در یک قطعه}$$

$$\mathcal{K}P = \int p dv = \int \vec{E} \cdot \vec{J} dv$$

$$p = \int EJ dv = \int E dl \int J ds = VI \Rightarrow P = VI$$

شرایط مرزی برای بردار چگالی جریان



چنانچه سطح بین دو محیط هادی را در نظر بگیریم با فرض جریان یکنواخت و بدون تغییرات زمانی، سطح گاوسی استوانه ای مطابق شکل با ارتفاع h و سطح مقطع Δs را در نظر بگیرید.

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \int_v \nabla \cdot \vec{J} dv = 0 \quad h \rightarrow 0$$

$$\oint \vec{J} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow \int_{\text{پایین}} \vec{J}_1 \cdot d\vec{s}_1 + \int_{\text{بالا}} \vec{J}_2 \cdot d\vec{s}_2 + \int_{\text{جانبی}} \vec{J} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$-\Delta s J_{1n} + \Delta s J_{2n} + 0 = 0 \Rightarrow J_{1n} = J_{2n}$$

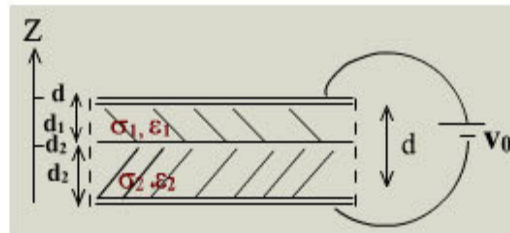
از طرفی

$$E_{1z} = E_{2z} \Rightarrow \frac{J_{1z}}{\sigma_1} = \frac{J_{2z}}{\sigma_2}$$

بنابراین خطوط $\vec{J}$ از یک محیط رساناتر به محیط با رسانائی کمتر ($\sigma_2 < \sigma_1$) وارد می شوند می شکنند و به خط عمود بر سطح مشترک نزدیکتر می گردد.

مثال: فضای بین صفحات موازی خازنی با دو نوع هادی که دارای σ_1, ϵ_1 و نیز σ_2, ϵ_2 می باشد پر شده است چنانچه فاصله دو فلز خازن d و ولتاژ منبع متصل به خازن V_0 باشد مطلوبست تعیین $\vec{J}, \vec{E}, \vec{D}, \vec{P}$ و چگالی بارهای آزاد و مقید روی تمام سطوح در حالت ماندگار

$$d = d_1 + d_2$$



$$\text{Steady state} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

(در حالت علقی تلفی مینا و شروع محاسبات از بردار $\vec{J}$ می باشد)

$$J_{1z} = J_{2z} = J, \quad E_1 = \frac{J}{\sigma_1}, \quad E_2 = \frac{J}{\sigma_2}$$

$$V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{z} = -\int_0^{d_1} (-E_2 \hat{z}) \cdot (\hat{z} dz) - \int_{d_1}^d (-E_1 \hat{z}) \cdot (\hat{z} dz)$$

$$V_0 = \frac{J}{\sigma_2} d_2 + \frac{J}{\sigma_1} d_1 \Rightarrow \vec{J} = \frac{V_0 \sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1} (-\hat{z})$$

$$\vec{E}_1 = \vec{J} / \sigma_1 = \frac{V_0 \sigma_2}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1} (-\hat{z})$$

$$\vec{E}_2 = \vec{J} / \sigma_2 = \frac{V_0 \sigma_1}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1} (-\hat{z})$$

$$D_1 = \epsilon_1 E_1 = \frac{V_0 \epsilon_1 \sigma_2}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}, \quad D_2 = \epsilon_2 E_2 = \frac{V_0 \epsilon_2 \sigma_1}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}$$

$$\vec{P}_1 = \vec{D}_1 - \epsilon_0 \vec{E}_1 = (\epsilon_1 - \epsilon_0) \vec{E}_1 = \frac{V_0 \sigma_2 (\epsilon_1 - \epsilon_0)}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1} (-\hat{z})$$

$$\vec{P}_2 = \vec{D}_2 - \epsilon_0 \vec{E}_2 = (\epsilon_2 - \epsilon_0) \vec{E}_2 = \frac{V_0 \sigma_1 (\epsilon_2 - \epsilon_0)}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1} (-\hat{z})$$

$$\rho_s(z=0) = \vec{D}_2 \cdot \hat{n} = -\frac{V_0 \epsilon_2 \sigma_1}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}$$

$$\rho(z=d_2) = D_2 - D_1 = \frac{V_0 (\epsilon_2 \sigma_1 - \epsilon_1 \sigma_2)}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}$$

$$\left. \vec{n} \right|_{z=0} = \hat{z} \quad \text{روی هادی پائین}$$

$$\hat{n} \Big|_{z=d} = -\hat{a}_z \quad \text{روی هادی بالا}$$

$$\rho_s(z=d) = \vec{D}_1 \cdot \hat{n} = \frac{V_0 \varepsilon_1 \sigma_2}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}$$

$$\rho_{ps}(z=0) = \vec{P}_1 \cdot \hat{n} = \vec{P}_2 \cdot (-\hat{a}_z) = \frac{V_0 \sigma_1 (\varepsilon_2 \varepsilon_0)}{\sigma_1 d_2 + \sigma_1 d_1}$$

$$\rho_{ps}(z=d_2) = \vec{P}_1 - \vec{P}_2 = V_0 \frac{\sigma_2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) - V_0 (\varepsilon_2 - \varepsilon_0)}{\sigma_1 d_2 + \sigma_1 d_1}$$

$$\rho_{ps}(z=d) = \vec{P}_1 \cdot \vec{n} = \vec{P}_1 \cdot \hat{a}_z = -\frac{V_0 \sigma_2 (\varepsilon_1 \varepsilon_0)}{\sigma_1 d_2 + \sigma_1 d_1}$$

نکته: برای بررسی حالات گذرا (transient) در خصوص رفتار زمانی توزیع بار (ρ) قبل از رسیدن به حالت ماندگار ($t \rightarrow \infty$) به قرار زیر عمل می شود.

(در صورت همگن بودن محیط یا ثبات ε, δ)

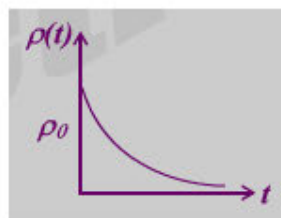
$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\nabla \cdot (\sigma \vec{E}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\sigma \nabla \cdot \vec{E} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\sigma \frac{\rho}{\varepsilon} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho(t) = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} t}$$



— ()

(0)

فصل پنجم

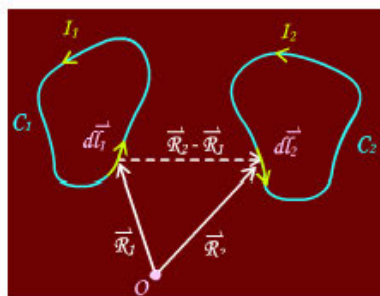
میدان های مغناطیسی ساکن Static Magnetic Fields

یونانیها در حدود ۶۰۰ سال قبل از میلاد با نیروی جاذبه قطعات طبیعی آهنربا آشنا بودند و از کلمه Magnesia (مکانی که اولین بار آهنربای طبیعی در آنجا دیده شده) برای لغت مغناطیس استفاده نمودند.

در سال ۱۶۰۰ میلادی پزشک دربار انگلستان بنام گیلیوت با آزمایشاتی به وجود آهنربای زمین پی برد. سپس افرادی مانند ولتا، آمپر و بیوساوار بررسی های بیشتر و کشیغیات متعددی را بدست آوردند که منجر به ارائه قوانینی در میدان های مغناطیسی گردید.

قانون آمپر در فضای خالی

دو مدار بسته c_1, c_2 که بترتیب جریان های مستقیم I_1, I_2 از آنها می گذرد و در فضای خالی مستقر شده اند را در نظر می گیریم (I_2, I_1 جریان های مستقیم هستند)



نیروی وارد بر dl_2 از طرف dl_1

$$d\vec{F}_{21} \propto I_1, I_2 \propto \frac{1}{|\vec{R}_2 - \vec{R}_1|^2} \propto \mu$$

$$\perp d\vec{l}_2, \perp d\vec{l}_1 \times (\vec{R}_2 - \vec{R}_1) \Rightarrow d\vec{F}_{21} \text{ جهت: } d\vec{l}_2 \times [d\vec{l}_1 \times (\vec{R}_2 - \vec{R}_1)]$$

$$d\vec{F}_{21} = k\mu \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times [I_1 d\vec{l}_1 \times (\vec{R}_2 - \vec{R}_1)]}{|\vec{R}_2 - \vec{R}_1|^3}$$

$$\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-4} \text{ H/m}$$

μ ضریب نفوذپذیری مغناطیسی Magnetic permeability محیط

$$k = \frac{1}{4\pi}$$

بنابراین کل نیروی وارد بر c_2 حامل جریان I_2 به سبب کل مدار c_1 حامل جریان I_1 عبارتست

$$\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} I_2 d\vec{l}_2 \times \oint_{C_1} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times (\vec{R}_2 - \vec{R}_1)}{|\vec{R}_2 - \vec{R}_1|^3} \quad \text{از:}$$

که بنام قانون آمپر معروف است.

چگالی فلوی میدان مغناطیسی Magnetic flux density

در معادله قبل انتگرال دوم (روی مسیر C_1) را چگالی فلوی میدان مغناطیسی تولید شده توسط جریان عبوری از کل مدار C_1 در نقطه $\vec{R}_2$ گفته می شود.

$$\vec{B}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times (\vec{R}_2 - \vec{R}_1)}{|\vec{R}_2 - \vec{R}_1|^3}$$

بنابراین

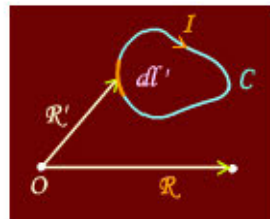
$$\vec{F}_{21} = \oint_{C_2} I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{B}_{21}$$

واحد $\vec{B}$ نیوتن بر آمپر یا وبر بر متر مربع می باشد که به آن تسلا گویند.

$$\frac{N}{Amp} \equiv \frac{Wb}{m^2} \equiv Tesla$$

بنابراین با توجه به تعریف فوق، در هر نقطه دلخواه $\vec{R}$ بردار $\vec{B}$ بعلت وجود یک مدار حامل جریان بصورت روبرو محاسبه می شود:

$$\vec{B}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I d\vec{l}' \times (\vec{R} - \vec{R}')}{|\vec{R} - \vec{R}'|^3}$$



که به قانون بیوساوار Biot & Savart مشهور است.

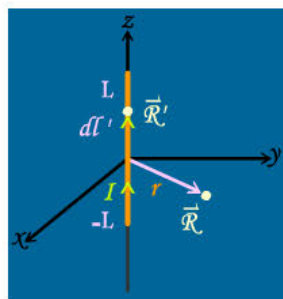
برای منابع جریان سطحی و حجمی بترتیب با چگالی جریان $\vec{J}_s, \vec{J}_v$ بردار $\vec{B}$ بصورت زیر خواهد بود:

$$\vec{B}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{J}_s dS' \times (\vec{R} - \vec{R}')}{|\vec{R} - \vec{R}'|^3}$$

$$\vec{B}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J} dV' \times (\vec{R} - \vec{R}')}{|\vec{R} - \vec{R}'|^3}$$

نکته: از $\vec{J}$ بجای $\vec{J}_s$ نیز استفاده می شود واحد $\vec{J}_s$ برابر $\frac{Amp}{m}$ است.

مثال: چنانچه جریان مستقیم I در یک سیم مستقیم بطول $2L$ جاری باشد، $\vec{B}$ در نقطه ای واقع در صفحه عمودالمنصف این سیم که فاصله r از سیم قرار دارد را بدست آورید:



$$\vec{B}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{Id\vec{l}' \times (\vec{R} - \vec{R}')}{|\vec{R} - \vec{R}'|^3}$$

$$\vec{R} = r\hat{a}_r$$

$$\vec{R}' = z'\hat{a}_z$$

$$d\vec{l}' = d\vec{l}_z = \hat{a}_z dz'$$

$$\vec{R} - \vec{R}' = r\hat{a}_r - z'\hat{a}_z$$

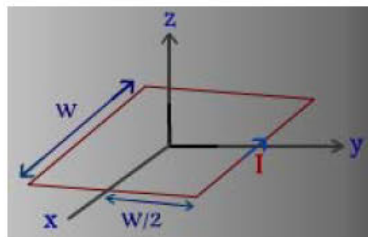
$$|\vec{R} - \vec{R}'| = \sqrt{r^2 + z'^2}$$

$$\vec{B}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{Idz'\hat{a}_z \times (r\hat{a}_r - z'\hat{a}_z)}{[r^2 + z'^2]^{3/2}}$$

$$\vec{B}(\vec{R}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{rdz'\hat{a}_\phi - 0}{[r^2 + z'^2]^{3/2}} = \hat{a}_\phi \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{z'}{\sqrt{r^2 + z'^2}} \right) \Big|_{-L}^L$$

$$\vec{B}(\vec{R}) = \frac{\mu_0 IL}{2\pi\sqrt{r^2 + L^2}} \hat{a}_\phi \quad \text{Tesla}$$

مثال: مطلوبست محاسبه چگالی فلوئ میدان مغناطیسی در مرکز یک مدار مربع شکل که جریان I از آن عبور می کند طول ضلع مربع W می باشد.



$$\vec{B} = 4B_1$$

$$B_1 = \text{چگالی فلوئ مغناطیسی ناشی از سیم بطول W در فاصله } \frac{W}{2}$$

$$2L = W, \quad r = \frac{W}{2}$$

با تکیه بر نتیجه مثال قبل:

$$\frac{IW}{\sqrt{\frac{W}{W} \frac{W}{W}}} a_z$$

پتانسیل مغناطیسی برداری

دیده می شود که محاسبه $\vec{B}$ از طریق قانون بیوساوار که با انتگرال گیری برداری صورت می گیرد مشکل است. حال می توان نشان داد که $\vec{B}$ براحتی از برداری که بنام پتانسیل مغناطیسی برداری تعریف می شود محاسبه کرد:

$$\vec{B}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \times \left[\frac{\vec{J}(\vec{R}')}{|\vec{R} - \vec{R}'|} \right] dV'$$

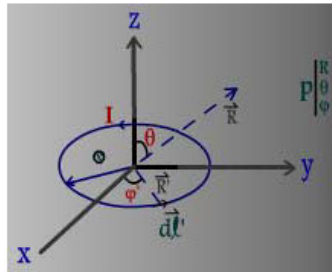
$$\vec{B} = \nabla \times \left[\frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{R}')}{|\vec{R} - \vec{R}'|} dV' \right]$$

$$\vec{A}(\vec{R}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{R}')}{|\vec{R} - \vec{R}'|} dV'$$

پتانسیل مغناطیسی برداری Vector magnetic potential

دو قطبی مغناطیسی Magnetic Dipole

یک دو قطبی مغناطیسی متشکل از یک حلقه دایره ای کوچک بشعاع مشخصی است که جریان الکتریکی از آن عبور می کند. بعنوان مثال مطابق شکل یک مدار دایره ای بشعاع b که جریان الکتریکی از آن عبور می کند بعنوان مثال مطابق شکل یک مدار دایره ای بشعاع b که جریان I از آن می گذرد را در نظر بگیرید چگالی فلوی میدان مغناطیسی بعلت این ساختار در فواصل دور ($R \gg b$) بصورت زیر محاسبه می شود.



موقعیت نقطه کلی P در مختصات کروی (R, θ, ϕ) و موقعیت دیفرانسیل منبع Idl' بصورت

$$\left(b, \frac{\pi}{2}, \phi'\right) \text{ است.}$$

$$\vec{A}(\vec{R}') = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{Id\vec{l}}{|\vec{R} - \vec{R}'|}$$

$$\vec{R} = \hat{a}_x x + \hat{a}_y y + \hat{a}_z z = R\hat{a}_R$$

$$\vec{R}' = \hat{a}_x b \cos \phi' + \hat{a}_y b \sin \phi' = b\hat{a}_{\phi'}$$

$$\vec{R} - \vec{R}' = (x - b \cos \phi')\hat{a}_x + (y - b \sin \phi')\hat{a}_y + z\hat{a}_z$$

$$|\vec{R} - \vec{R}'| = \sqrt{(x - b \cos \phi')^2 + (y - b \sin \phi')^2 + z^2}$$

$$\frac{1}{|\vec{R} - \vec{R}'|} = \left[x^2 + y^2 + z^2 + b^2 - 2bx \cos \phi' - 2by \sin \phi' \right]^{-\frac{1}{2}}$$

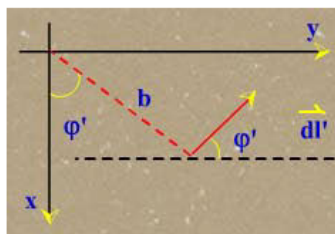
$$\frac{1}{|\vec{R} - \vec{R}'|} = \left[R^2 + b^2 - 2bx \cos \phi' - 2by \sin \phi' \right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{|\vec{R} - \vec{R}'|} = R^{-1} \left[1 + \frac{b^2}{R^2} - \frac{2bx}{R^2} \cos \phi' - \frac{2by}{R^2} \sin \phi' \right]^{-\frac{1}{2}}$$

برای فواصل دور:

$$R \gg b \Rightarrow \frac{b^2}{R^2} \rightarrow 0$$

بنابراین با تقریب فوق و استفاده از دو جمله ای نیوتن:



$$\frac{1}{|\vec{R} - \vec{R}'|} \approx \frac{1}{R} \left[1 + \frac{bx}{R^2} \cos \varphi' + \frac{by}{R^2} \sin \varphi' \right]$$

$$d\vec{l}' = \hat{a}_\varphi b d\varphi' = -\hat{a}_x b \sin \varphi' d\varphi' + \hat{a}_y b \cos \varphi' d\varphi'$$

$$d\vec{l}' = b d\varphi' [-\hat{a}_x \sin \varphi' + \hat{a}_y \cos \varphi']$$

$$\vec{A}(\vec{R}) \approx \frac{\mu_0 I b}{4\pi R} \int_0^{2\pi} (-\hat{a}_x \sin \varphi' + \hat{a}_y \cos \varphi') \left[1 + \frac{bx}{R^2} \cos \varphi' + \frac{by}{R^2} \sin \varphi' \right] d\varphi'$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I b}{4\pi R} \left(-\hat{a}_x \frac{yb}{R^2} \pi + \hat{a}_y \frac{xb}{R^2} \pi \right)$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I b^2 \pi}{4\pi R^3} (-\hat{a}_x y + \hat{a}_y x)$$

ممان دو قطبی مغناطیسی بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\vec{M} = \hat{a}_z SI$$

$$S = \text{Dipole Area} = \pi b^2$$

بنابراین

$$\vec{A}(\vec{R}) = \frac{\mu_0 \vec{M}}{4\pi R^3} [\hat{a}_z \times \vec{R}]$$

با توجه به آنکه

$$\hat{a}_z \times \vec{R} = -\hat{a}_x y + \hat{a}_y x$$

در نتیجه

$$\vec{A}(\vec{R}) = \frac{\mu_0 \vec{M} \times \vec{R}}{4\pi R^3} \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\frac{\vec{M}}{R} \right)$$

$$\vec{A}(\vec{R}) = \hat{a}_\varphi \frac{\mu_0 M}{4\pi R^2} \times \sin \theta$$

و یا:

$$\hat{a}_z \times \hat{a}_R = \hat{a}_\varphi \sin \theta \quad \text{چون}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0 I \pi b^2}{4\pi R^3} [\hat{a}_R 2 \cos \theta + \hat{a}_\varphi \sin \theta]$$

- تشابه و دوگان در میدانهای الکتریکی و مغناطیسی

با توجه به:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho dv'}{|\vec{R} - \vec{R}'|} \quad \text{الکتریکی}$$

$$V = \frac{\vec{P} \cdot \hat{a}_R}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

$$\vec{E} = -\nabla V$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J} dv'}{|\vec{R} - \vec{R}'|} \quad \text{مغناطیسی}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 \vec{M} \times \hat{a}_R}{4\pi R^2}$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

می توان گفت که:

∇	0	$\frac{1}{\epsilon_0}$	$\vec{E}$	$\vec{P}$	v	ρ	الکتریکی
∇X	X	μ_0	$\vec{B}$	$\vec{M}$	$\vec{A}$	$\vec{J}$	مغناطیسی
مشتق	ضرب	ضرب تو در دیگری	میدان	ممان دوقطبی	پتانسیل	منبع	

- دیورژانس و کرل $\vec{B}$

می دانیم که دیورژانس کرل هر بردار برابر صفر است بنابراین

$$\nabla \cdot \vec{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

و یا:

صفر شدن دیورژانس $\vec{B}$ به این مفهوم است که خطوط میدان $\vec{B}$ خطوط بسته ای هستند که نقطه شروع و نقطه ختم مشخص ندارد و یا عبارتی قطب مثبت یا منفی مانند میدان الکتریکی نداشته و عبارتی تک قطب در میدان مغناطیسی وجود ندارد بلکه بصورت دو قطبی است.

از طرفی B بعنوان چگالی فلوی مغناطیسی می تواند در محاسبه فلوی میدان مغناطیسی عمل نماید یعنی کل فلوی مغناطیسی که از سطح S خارج می شود:

$$\psi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

اگر S سطح بسته ای باشد

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_V \nabla \cdot \vec{B} dv = 0$$

$$\psi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_S \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

همچنین

می دانیم که طبق قضیه هلمهولتز برای مشخص کردن یک میدان بایستی کرل و دیورژانس آن میدان معین نمائیم.

محاسبه کرل:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{F} = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$$

می دانیم که برای هر برداری

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \nabla \times \int_V \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J}}{|R - R'|} dV'$$

از طرفی

چنانچه از طرفین کرل بگیریم، می توان ثابت کرد که:

$$\nabla \times \vec{B} = \nabla \times \nabla \times \vec{A} = \mu_0 \vec{J} \Rightarrow \nabla \times \vec{B} = \vec{J}$$

همچنین باتوجه به روابط برداری می توان ثابت کرد که:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

که مشابه $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ در میدان الکتریکی ساکن است.

قانون مداری آمپر Ampere's circuital law

می دانیم که:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

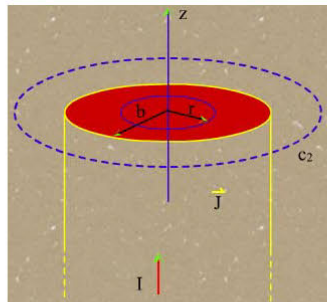
$$\int_S \nabla \times \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_S \mu_0 \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

یا عبارتی انتگرال $\vec{B}$ روی یک مسیر بسته C برابر است با μ_0 برابر کل جریانی که از سطح S که مسیر بسته C آنرا احاطه کرده است.

رابطه فوق مشابه قانون گاوس در میدان الکتریکی است که می تواند جهت محاسبه $\vec{B}$ که روی همه نقاط مسیری مقدار مساوی داشته باشد بکار گرفته شود.

مثال: یک هادی مستقیم و بسیار طویل با سطح مقطع دایره ای به شعاع b جریان ماندگار I را حمل می کند چگالی فلوی میدان مغناطیسی در کل فضا را بدست آورید:



با فرض توزیع یکنواخت جریان در سطح مقطع هادی:

$$\vec{J} = \frac{I}{\pi b^2} \hat{a}_z$$

C_1 یک مسیر دایره ای به شعاع r است که B روی نقاط آن مقدار ثابتی است. $r \leq b$:

$$\oint_{C_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{s}'$$

$$\vec{B}_1 = B_1 \hat{a}_\phi, \quad d\vec{l} = r d\phi \hat{a}_\phi, \quad d\vec{s}' = r' dr' d\phi'$$

بنابراین

$$\oint_{C_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} B_1 \hat{a}_\phi \cdot \hat{a}_\phi r d\phi = B_1 2\pi r$$

$$\int_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{s}' = \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{I}{\pi b^2} \hat{a}_z \cdot \hat{a}_z r' dr' d\phi' = \frac{I}{\pi b^2} \pi r^2$$

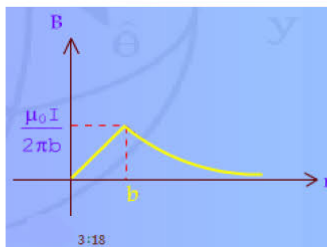
در نتیجه

$$B_1 2\pi r = \mu_0 \frac{I r^2}{b^2} \Rightarrow \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I r}{2\pi b^2} \hat{a}_\phi$$

اما برای ناحیه $r > b$

$$\oint_{C_2} \vec{B}_2 \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_{S_2} \vec{J} \cdot d\vec{s}' = \mu_0 I_{total}$$

$$2\pi r B_2 = \mu_0 I \Rightarrow \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{a}_\phi$$



مثال: مطلوبست تعیین چگالی فلوی میدان مغناطیسی در داخل سیم پیچ حلقوی دارای تعداد دور برابر با N با هسته هوایی که جریان I از سیم پیچ می گذرد. سطح مقطع هسته آن دایره ای و شعاع متوسط آن برابر b و شعاع هسته (هر دور سیم) برابر a می باشد.

در فاصله $b-a < r$ چون هیچ جریانی از یک مسیر دایره ای بشعاع r عبور نمی کند طرف دوم قانون آمپر صفر و بنابراین $B=0$ می شود.

همچنین برای $r > b+a$ چون کل جریان $I_{total} = NI - NI = 0$ است باز $B=0$ خواهد بود.

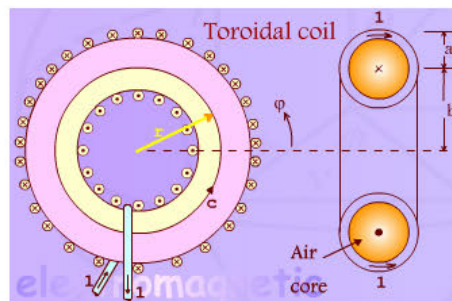
اما $b-a < r < b+a$

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{total}$$

$$B 2\pi r = \mu_0 NI$$

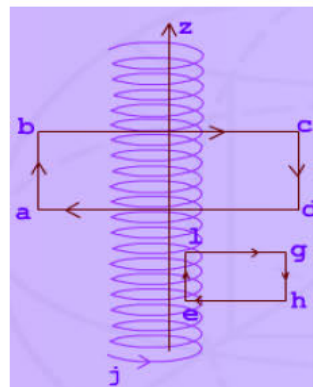
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \hat{a}_\varphi$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 NI}{\ell_{eff}} \hat{a}_\varphi$$



مثال: مطلوبست محاسبه $\vec{B}$ ناشی از یک سلفوئید طویل، یکنواخت و پیوسته.

شعاع سلفوئید برابر a با جریان عبور از آن برابر I و تعداد دورهای سیم پیچ در واحد طول برابر n است. با فرض آنکه محور سلفوئید منطبق با محور z است، با عنایت به قانون دست راست و نامحدود بودن طول سیم پیچ و یکنواختی آن B تنها دارای مولفه z است.



برای نقاط خارج از سلفوئید:

با مسیر مستطیلی $abcd$

$$\oint_{abcd} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{total}$$

$$I_{total} = (nI - nI)ab = 0$$

$$\oint_{abcd} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_d^a \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$= \int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{l} + 0 + \int_c^d \vec{B} \cdot d\vec{l} + 0 = 0$$

$$= B_1(ab) - B_2(cd) = 0$$

چون $\vec{B}$, $d\vec{l}$ در دو مسیر bc و da بر هم عمودند

چون B در جهت z است

چون فاصله اضلاع ab و cd از سیم بیج الزاماً برابر نیستند دو حالت ممکن است وجود داشته باشد یا B_1 و B_2 (میدان در خارج از سلفوئید) صفر است و یا در همه جا (خارج از سلفوئید) ثابت.

اما حالت ثابت بودن غیرممکنست بنابراین:

$$B_1 = B_2 = \frac{B}{\text{خارج}} = 0$$

برای نقاط داخل سلفوئید:

با مسیر مستطیلی $efgh$

$$\oint_{efgh} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{total}$$

$$I_{total} = nI(ef)$$

از چهار زیر مسیر تنها مسیر ef انتگرال مقدار دارد

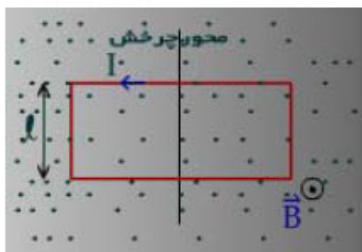
$$\oint_{efgh} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_e^f \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(ef)$$

بنابراین

$$B(ef) = \mu_0 nI(ef) \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 nI \hat{a}_z$$

نکته: زمانی که یک قاب (حلقه) حامل جریان (دو قطبی مغناطیسی) در یک میدان مغناطیسی قرار گیرد بر دو قطبی نیرویی وارد می شود (گشتاور) بنحوی که مماس مغناطیسی دو قطبی را در جهت میدان قرار گیرد.

بعنوان مثال: اگر یک دو قطبی مغناطیسی به ابعاد l, a (با مساحت $s=al$) که جریان I از آن عبور می کند در یک میدان یکنواختی با چگالی $\vec{B}$ قرار گیرد، کویل حرکتی وارد بر دو قطبی را به قرار زیر بدست می آید.



(زاویه بین $\vec{B}$ و $\vec{M}$)

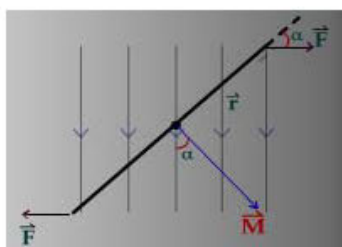
$$\vec{M} = Ial\hat{a}_n$$

$$\vec{M} = IS\hat{a}_n$$

$$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$$

$$F = IlB \sin 90^\circ = IlB$$

طبق قانون بیوساوار $\vec{F}$ نیروی وارد بر اضلاع بطول l کویل نیرو وارد بر دو قطبی، ایجاد گشتاور زیر می کند.



$$\vec{T} = \vec{r} \times 2\vec{F} \Rightarrow T = \frac{a}{2} \times 2IB \sin \alpha$$

$$T = aIB \sin \alpha$$

$$T = SIB \sin \alpha$$

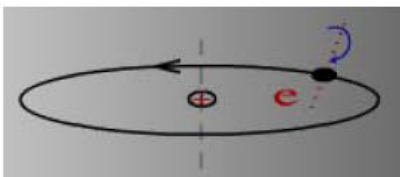
$$T = MB \sin \alpha$$

$$\vec{T} = \vec{M} \times \vec{B}$$

بنابراین دو قطبی تحت تأثیر این گشتاور قرار گرفته و حرکت می کند تا α به مقدار صفر برسد و یا عبارتی $\vec{M}$ در امتداد $\vec{B}$ قرار گیرد.

انواع اجسام مغناطیسی و میدان مغناطیسی در حضور آنان

در ساختار تمام مواد و عناصر دو قطبی های مغناطیسی که ناشی از چرخش الکترون روی مدار به دور هسته اتم آنان است وجود دارد. علاوه بر آن حرکت هر الکترون به دور خود نیز دو قطبی مغناطیسی بوجود می آورد بنابراین در داخل هر اتم دو نوع ممات دو قطبی دیده می شود.



براساس آنکه ممات کل هر اتم در حالت عادی (تعادل) به چه صورت است و عکس العمل آن در زمان اعمال یک میدان مغناطیسی خارجی چگونه است مواد به دسته-های زیر تقسیم می شوند.

مواد Diamagnetic: ممات کل هر اتم برابر صفر است وقتی که در یک میدان قرار می گیرد، میدان کل کاهش جزئی می یابد موادی مانند: بیسموت، هیدروژن، هلیوم، مس، طلا، سیلیکون و جرمانیم

مواد Paramagnetic: ممات کل هر اتم برابر صفر نمی باشد.

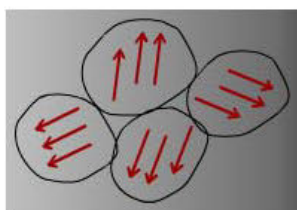
وقتی که در یک میدان قرار می گیرد، میدان کل افزایش جزئی می یابد.

موادی مانند: پتاسیم، اکسیژن و نگستن

این دو مواد را مواد غیر مغناطیسی گویند Nonmagnetic Materials اما نوع سوم:

مواد مغناطیسی است که بنام Ferromagnetic مشهورند.

در این نوع ممات کل هر اتم دارای مقدار قابل توجه است و هر دسته بر روی هم اثر گذاشته و حوزه های کوچک مغناطیسی بوجود می آورند که دارای ابعادی تا چند mm^3 هستند.



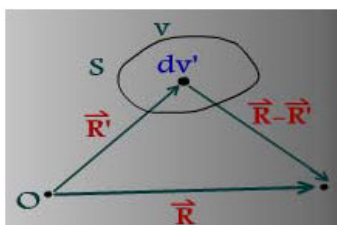
اما در کل بدلیل نامنظم بودن این حوزه ها، اثر یکدیگر را خنثی می کنند. اما وقتی در یک میدان قرار می گیرند، میدان کل را شدیداً افزایش می دهند. موادی مانند: آهن، نیکل و کوبالت

جریانهای معادل مغناطیسی

در صورتی که مواد خصوصاً مغناطیسی قرار گیرند، مسئله از حالت ساده یعنی فضای آزاد خارج می شود و قوانین موجود که تا کنون ارائه شده تحت تأثیر و تغییر قرار می گیرد. در این مرحله در پی بررسی موضوع خواهیم بود.

اگر $\vec{m}$ ممات یک اتم جسم مغناطیسی باشد و N تعداد اتم های جسم در واحد حجم بنابراین $\vec{M} = N\vec{m}$ ممات دو قطبی در واحد حجم جسم خواهد بود.

حال می توان میدان مغناطیسی حاصل از جسم مغناطیسی برای ناحیه دور را محاسبه کرد که البته قابل تعمیم برای فواصل نزدیک نیز می باشد.



$$d\vec{A}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left\{ \frac{\vec{M}}{|\vec{R} - \vec{R}'|} \right\} dv'$$

$$\vec{A}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \times \left\{ \frac{\vec{M}(\vec{R}')}{|\vec{R} - \vec{R}'|} \right\} dv'$$

می توان ثابت کرد:

$$\vec{A}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \times \vec{M}}{|\vec{R} - \vec{R}'|} dv' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{M} \times \hat{n}}{|\vec{R} - \vec{R}'|} ds'$$

$\hat{n}$ بردار واحد عمود بر سطح S است.

با مقایسه رابطه اخیر با رابطه اصلی برای منبع جریان حجمی $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J} dv'}{|\vec{R} - \vec{R}'|}$ و یا

برای منبع جریان سطحی می توان گفت که:

$$\begin{aligned} \nabla' \times \vec{M} &\equiv \vec{J}_m & \left[\frac{A}{m^2} \right] \\ \vec{M} \times \hat{n} &\equiv \vec{J}_{ms} & \left[\frac{A}{m} \right] \end{aligned}$$

$\vec{J}_m$ جریان معادل حجمی مغناطیسی و $\vec{J}_{ms}$ جریان معادل سطحی مغناطیسی که می توانند جایگزین یک ماده مغناطیسی شده و مسئله را به مسئله ساده محیط خلاء تبدیل نمود.

شدت میدان مغناطیسی Magnetic Field Intensity

در صورت وجود جسم مغناطیسی و یک منبع جریان حقیقی

$$\vec{A}(\vec{R}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J} + \vec{J}_m}{|\vec{R} - \vec{R}'|} dv'$$

$$\vec{B}(\vec{R}) = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int_V \frac{\vec{J} + \vec{J}_m}{|\vec{R} - \vec{R}'|} dv'$$

و یا:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 [\vec{J} + \vec{J}_m]$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 [\vec{J} + \nabla \times \vec{M}]$$

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \vec{J} + \nabla \times \vec{M}$$

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{J}$$

$$H \stackrel{\Delta}{=} \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad \left[\frac{Amp}{m} \right], \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

یعنی کرل بردار $\vec{H}$ که به آن شدت میدان مغناطیسی گفته می شود تنها وابسته جریانهای حقیقی است شکل انتگرالی رابطه اخیر بصورت:

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{total} = \int_s \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

از طرفی در محاسبه دیوژانس شدت میدان مغناطیسی

$$\nabla \cdot \vec{H} = \nabla \cdot \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot \vec{B} - \nabla \cdot \vec{M} = 0 - \nabla \cdot \vec{M}$$

یعنی دیوژانس $\vec{H}$ تابع وضعیت مغناطیسی جسم ($\vec{M}$) می باشد اما در عمل در بسیاری از

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0$$

مسائل $\nabla \cdot \vec{M} = 0$ خواهد بود و بنابراین

صفر بودن $\vec{H}$ یا ($\vec{M}$) نشان دهنده یکنواختی $\vec{M}$ (یا $\vec{H}$) است و اینکه خطوط میدان از نقطه

ای شروع و یا به نقطه ای ختم نمی شود و عبارتی با رمغناطیسی وجود ندارد.

رابطه بین $\vec{H}$ و $\vec{M}$ در اجسام غیر مغناطیسی (مواد پارامگنتیک و دیامگنتیک) خطی است اما

در مواد فرومگنتیک به جز در مقادیر کوچک غیر خطی است.

$$\vec{M} = X_m \vec{H}$$

X_m ضریب تأثیرپذیری مغناطیسی (Magnetic Susceptibility) می گویند که تعیین کننده میزان

وضعیت مغناطیسی در اثر اعمال مقدار معین $\vec{H}$ است که بطور تجربی بدست می آید.

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad \text{می دانیم که:}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$$

و یا:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 X_m \vec{H} = \mu_0 (1 + X_m) \vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

که در آن

$$\mu = \mu_0(1 + X_m) = \mu_0\mu_r$$

$$\mu_r = 1 + X_m$$

μ ضریب نفوذپذیری مغناطیسی مطلق absolute permeability

μ_r ضریب نفوذپذیری مغناطیسی نسبی relative permeability

در اجسام دیامگنیتیک μ_r کوچکتر از یک و نزدیک به یک است (و X_m آن عدد منفی خیلی نزدیک به صفر)

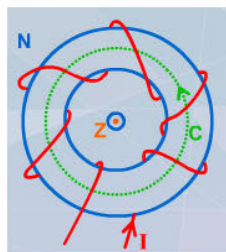
در اجسام پارامگنیک μ_r بزرگتر از یک و نزدیک به یک است (و X_m آن عدد مثبت و خیلی نزدیک به صفر)

اما در اجسام فرومگنیتیک μ_r خیلی بزرگتر از یک (بین ۳۰۰ تا ۳۰۰۰ یا حتی بیشتر) است که بستگی به میزان H دارد.

بعنوان مثال: برای بیسموت بعنوان یک ماده دیامگنیتیک $\mu_r = 0.99983$

μ_r برای آلومینیم بعنوان یک ماده پارامگنیتیک $\mu_r = 1.00002$

مثال: یک سیم پیچ حلقوی که دارای N دور سیم یکنواخت دور هسته آهنی بطول متوسط l متر و مقطع دایره ای شکل به سطح S متر مربع پیچیده شده، جریان I عبور می کند مطلوبست شدت میدان مغناطیسی و چگالی در نقاط داخل هسته، چنانچه ضریب نفوذپذیری مغناطیسی هسته μ باشد.



$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

$$Hl = NI \Rightarrow \vec{H} = \frac{NI}{l} \hat{a}_\varphi$$

چنانچه از طول متوسط استفاده نشود:

$$H 2\pi r = NI$$

$$\vec{H} = \frac{NI}{2\pi r} \hat{a}_\varphi$$

$$\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = BS$$

برای محاسبه کل:

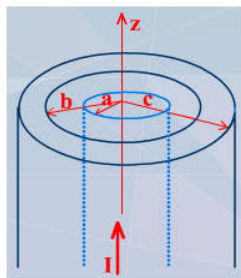
$$\phi = \frac{\mu NIS}{2\pi r}$$

S سطح مقطع هسته است که فلو از آن عبور می کند .

مثال: حول یک سیم که از آن جریان یکنواخت I عبور می کند و دارای مقطع دایره ای بشعاع a است و در جهت +z قرار گرفته استوانه تو خالی از جسم مغناطیسی با $\mu_r = 100$ قرار دارد

به نحوی که محور استوانه مغناطیسی و سیم حامل جریان محور z هاست. شعاع داخلی و خارجی استوانه به ترتیب b و c می باشد (c > b). مطلوبست محاسبه $\vec{M}, \vec{B}, \vec{H}$ در داخل

جسم مغناطیسی و چگالی جریانهای مغناطیسی بر حسب I, c, b, a برای منحنی بسته c دایره ای به شعاع r و $b < r < c$



$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_s \vec{J} \cdot d\vec{s} \Rightarrow 2\pi r H = I$$

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \hat{a}_\phi$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \frac{100\mu_0 I}{2\pi r} \hat{a}_\phi$$

$$\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} = (\mu_r - 1)\vec{H} = \frac{99I}{2\pi r} \hat{a}_\phi$$

$$\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{a}_r & \hat{a}_\phi & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & r \frac{99I}{2\pi r} & 0 \end{vmatrix}$$

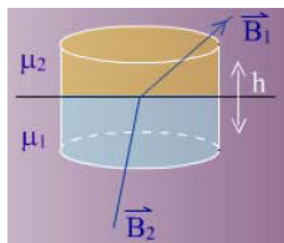
$$\vec{J}_{ms} = \vec{M} \times \hat{n}$$

$$r = b: \quad \vec{J}_{ms} = (\vec{M} \times \hat{n})_{r=b} = \frac{99I}{2\pi b} \hat{a}_\phi \times (-\hat{a}_r) = \frac{99I}{2\pi b} \hat{a}_z$$

$$r = c: \quad \vec{J}_{ms} = (\vec{M} \times \hat{n})_{r=c} = \frac{99I}{2\pi b} \hat{a}_\phi \times (\hat{a}_r) = -\frac{99I}{2\pi b} \hat{a}_z$$

شرایط مرزی برای میدان های مغناطیسی

در شرایط واقعی و عملی عموماً با چند ناحیه (جسم) در تماس با هم و با سطح مشترک مواجه هستیم.



$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \int \nabla \cdot \vec{B} dv = 0$$

$$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow \int_{\text{قاعده پائین}} \vec{B}_1 \cdot d\vec{s}_1 + \int_{\text{قاعده بالا}} \vec{B}_2 \cdot d\vec{s}_2 + \int_{\text{سطح جانبی}} \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$\vec{B} = \vec{B}_n + \vec{B}_t$$

چون $h \rightarrow 0$ بنابراین:

$$-B_{1n}\Delta S + B_{2n}\Delta S + 0 = 0$$

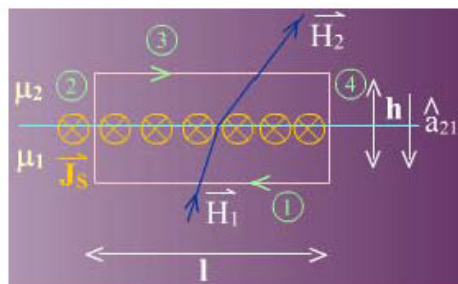
$$B_{1n} = B_{2n}$$

و نیز

$$\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n} \Rightarrow \frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{\mu_{r2}}{\mu_{r1}}$$

با توجه به $\vec{M} = \frac{B}{\mu_0} - \vec{H}$ مولفه های عمودی M نیز در هر دو ناحیه با هم برابر نمی باشند.

برای مولفه های مماسی:



چنانچه بین دو محیط جریان حقیقی سطحی $\vec{J}_s$ عمود بر صفحه و در جهت داخل صفحه روی سطح مشترک جاری باشد

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \Rightarrow \int_S \nabla \times \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} \Rightarrow$$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_1 \vec{H} \cdot d\vec{l}_1 + \int_2 \vec{H} \cdot d\vec{l}_2 + \int_3 \vec{H}_2 \cdot d\vec{l}_3 + \int_4 \vec{H} \cdot d\vec{l}_4$$

دو انتگرال صفر می شود.

$$= -H_{1t}\ell + 0 + H_{2t}\ell + 0 = (H_{2t} - H_{1t})\ell$$

انتگرال J روی سطح به انتگرال خطی بطول ℓ تبدیل می شود.

$$\int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = J_s \ell$$

$$(H_{2t} - H_{1t})\ell = J_s \ell \Rightarrow H_{2t} - H_{1t} = J_s$$

بنابراین

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \times \hat{a}_{21} = \vec{J}_s$$

$$\hat{a}_{21} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s$$

و یا

$\hat{a}_{21}$ برداری که عمود بر سطح مشترک از محیط ۲ بطرف محیط ۱ است.

$$H_{1t} = H_{2t}$$

چنانچه جریان سطحی بین دو محیط وجود نداشته باشد:

مدارهای مغناطیسی و مقاومت مغناطیسی

در یک مدار یا سیستم مغناطیسی سیم پیچ حلقوی ملاحظه شد که:

$$\vec{H} = \frac{NI}{\ell} \hat{a}_\phi$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu NI}{\ell} \hat{a}_\phi$$

$$\phi = BS = \frac{\mu N^2 S}{\ell}$$

می توان فلوی عبور کرده از هسته را به این صورت مرتب نمود:

$$\phi = \frac{NI}{\ell / \mu_s}$$

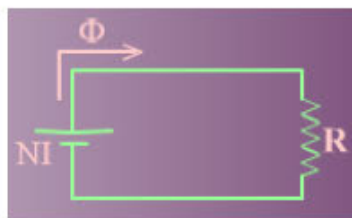
با کمی دقت می توان رابطه فوق را به مشابه قانون اهم $\left(I = \frac{V}{R}\right)$ در میدان الکتریک در نظر گرفت به نحوی که ϕ همانند I و NI همانند V که emf مدار الکتریکی است، تلقی نمود و یا عبارتی NI بصورت نیروی محرکه مغناطیسی magnetomotive force یا mmf برای یک مدار مغناطیسی که فلوی ϕ را به داخل مقاومت مغناطیسی بنام رلکتانس Reluctance جاری می کند.

$$R = \text{Reluctance} = \frac{\ell}{\mu_s}$$

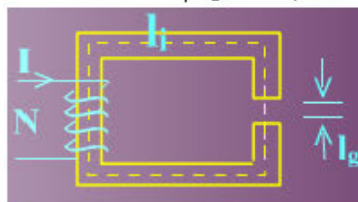
(مشابه $R = \frac{\ell}{\sigma_s}$ مقاومت الکتریکی)

مدار معادل مغناطیسی بصورت شکل زیر در خصوص سیستم های (مدارهای) مغناطیسی در نظر گرفت که تمام قوانین مدار الکتریکی در آن صادق است از جمله KVL و KCL .
واحد mmf آمپر دور، واحد مقاومت مغناطیسی $1/H$ است.

جهت منبع NI با توجه به جهت $\vec{B}$ در هسته تعیین می شود به نحوی که ϕ از قطب مثبت منبع خارج می شود:



مثال: در مدار روبرو مطلوبست محاسبه B و ϕ



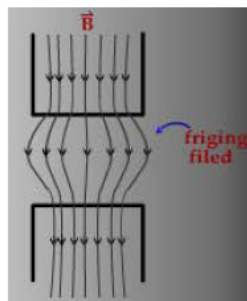
μ_r ضریب نفوذپذیری نسبی هسته =

ℓ_i Effective length (طول موثر هسته) طول متوسط هسته =

ℓ_g (air gap) طول فاصله هوایی =

$\ell_g \ll \ell_i$ سطح مقطع هسته = S

بدلیل آنکه طول فاصله هوایی خیلی کوچکتر از طول هسته است و یا ضخامت هسته آهنی خیلی بزرگتر از فاصله هوایی است، می توان از فوران میدان مغناطیسی fringing field صرفنظر کرد یعنی خطوط $\vec{B}$ که از هسته خارج می شوند انحرافی پیدا نمی کنند و صرفاً بطور عمود از هسته خارج و پس از طی فاصله هوایی دوباره وارد هسته آهنی می شوند.



$$B_i \sim B_g = B_n = B$$

$$H_g = \frac{B}{\mu_0}, H_i = \frac{B}{\mu_0 \mu_r}$$

برای یک مسیر بسته که قسمتی از آن فاصله هوائی عبور می کند.

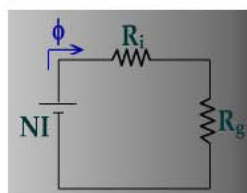
$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_s \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

$$\int_{c_i} \vec{H}_i \cdot d\vec{l} + \int_{c_g} \vec{H}_g \cdot d\vec{l} = NI$$

$$\frac{B}{\mu_0} \ell_g + \frac{B}{\mu_0 \mu_r} \ell_i = NI \Rightarrow B = \frac{NI}{\frac{\ell_g}{\mu_0} + \frac{\ell_i}{\mu_0 \mu_r}}$$

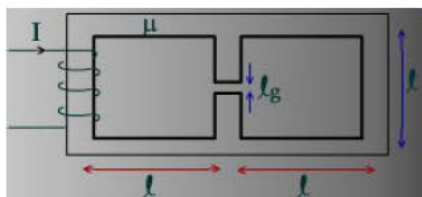
$$\phi = BS \Rightarrow \phi = \frac{NI}{\frac{\ell_g}{\mu_0 S} + \frac{\ell_i}{\mu_0 \mu_r S}} \Rightarrow \phi = \frac{NI}{R_g + R_i}$$

$$R_g = \frac{\ell_g}{\mu_0 S}, \quad R_i = \frac{\ell_i}{\mu_0 \mu_r S}$$

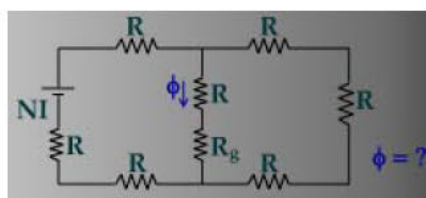


عموماً با توجه به مقادیر کمیتها $R_g \gg R_i$ است.

تمرین: چنانچه شکل روبرو برشی از یک مدار مغناطیسی باشد، مطلوبست چگالی فلوی میدان مغناطیسی در فاصله هوائی برحسب پارامترهای مدار و مدار مغناطیسی.

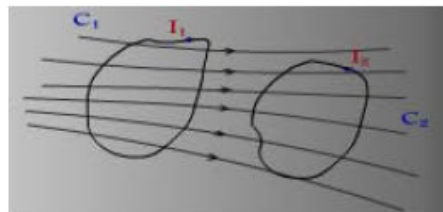


راهنمایی: مدار مغناطیسی بصورت زیر بدست می آید.



خود القاء و القاء متقابل Self Inductance & mutual Inductance

دو مدار C_1 و C_2 که به ترتیب جریان I_1 و I_2 از آنها عبور می کند و در مجاور یکدیگر هستند را در نظر بگیرید.



هر یک از دو مدار (حلقه) به ترتیب دارای سطوح S_1 ، S_2 می باشند.

اگر $\vec{B}_1$ چگالی فلوی مغناطیسی ایجاد شده توسط مدار C_1 ناشی از جریان I_1 باشد.

فلوی مغناطیسی بوجود آمده از مدار ۱ که از سطح S_1 عبور می کند (قطع می کند)

$$\phi_{11} = \int_{S_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{s}_1$$

فلوی مغناطیسی بوجود آمده از مدار ۱ که از سطح S_2 عبور می کند (قطع می کند)

$$\phi_{12} = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{s}_2$$

اگر مدار ۱ و ۲ به ترتیب شامل N_1 و N_2 دور باشند.

کل فلوی پیوند شده در مدار C_1 توسط $\vec{B}_1$ $\psi_{11} = N_1 \phi_{11} = \text{flux linkage}$

کل فلوی پیوند شده در مدار C_2 توسط $\vec{B}_1$ $\psi_{12} = N_2 \phi_{12} = \text{flux linkage}$

طبق تعریف:

$$L_{11} \triangleq \frac{\psi_{11}}{I_1} = \text{خود القاء (Self Inductance)} = \frac{(\text{عامل جریان فلوی تولیدی}) / (\text{کل فلوی عبور از خود سلف})}{I_1}$$

$$L_{12} \triangleq \frac{\psi_{12}}{I_1} = \text{القاء متقابل (Mutual Inductance)} = \frac{(\text{عامل جریان فلوی تولیدی}) / (\text{کل فلوی عبور از سلف مجاور})}{I_1}$$

و به همین ترتیب برای مدار ۲

$$\phi_{22} = \int_{S_2} \vec{B}_2 \cdot d\vec{s}_2, \quad \phi_{21} = \int_{S_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{s}_1$$

$$\psi_{22} = N_2 \phi_{22}, \quad \psi_{21} = N_1 \phi_{21}$$

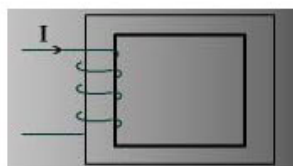
$$L_{22} = \frac{\psi_{22}}{I_2}, \quad L_{21} = \frac{\psi_{21}}{I_2}$$

این تعاریف برای محیط های خطی و میدانهای ساکن و یا میدانهای با تغییرات زمانی آهسته (نیمه ساکن) صادق است.

اما تعریف کامل:

$$L_{11} = \frac{d\psi_{11}}{dI_1}, \quad L_{12} = \frac{d\psi_{12}}{dI_1}$$

مثلاً برای یک سیم پیچ شامل N دور سیم و با هسته مسدود:



$=L$ طول موثر هسته

$=A$ سطح مقطع هسته

$=B$ چگالی فلوی میدان مغناطیسی در هسته ناشی از عبور جریان I

$$\phi = AB$$

$$d\phi = AdB$$

$$\psi = N\phi \Rightarrow d\psi = Nd\phi = NAdB$$

$$NI = \ell H$$

$$NdI = \ell dH \Rightarrow dI = \frac{\ell}{N} dH$$

$$L = \frac{d\psi}{dI} = \frac{NAdB}{\ell/N dH} \Rightarrow L = \frac{N^2 A}{\ell} \frac{dB}{dH}$$

چنانچه هسته دارای پرمیولیت خطی باشد (μ ثابت باشد) و یا عبارتی محیط خطی باشد

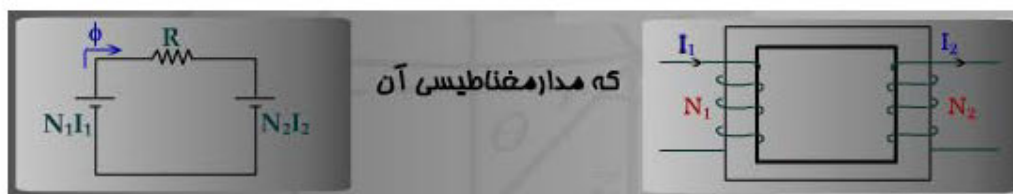
$$\frac{dB}{dH} = \mu$$

$$\Rightarrow L = \frac{N^2 A \mu}{\ell}$$

$$L = \frac{N^2}{\ell/\mu A} \Rightarrow L = \frac{N^2}{R}$$

از طرفی رلکتانس هسته $R = \frac{\ell}{\mu A}$ بنابراین:

چنانچه بر روی هسته مثال قبل سیم پیچ دومی پیچیده شود:



در مدار مغناطیسی داریم: $\phi R = N_1 I_1 - N_2 I_2$

اگر هسته ایده آل (ترانسفورماتور ایده آل) باشد:

$$\mu \rightarrow \infty$$

$$R = \frac{\ell}{\mu A} = 0$$

در نتیجه

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2} \quad \text{یا} \quad N_1 I_1 = N_2 I_2$$

یا عبارتی

اگر $I_2 = 0$ باشد:

$$B_1 = \mu H = \frac{\mu N_1 I_1}{\ell} \Rightarrow \phi_{11} = B_1 S = \frac{\mu N_1^2 I_1 A}{\ell}$$

$$\psi_{11} = N_1 \phi_{11} \Rightarrow L_{11} = \frac{\psi_{11}}{I_1} = \frac{\mu N_1^2 A}{\ell} \Rightarrow L_{11} = \frac{N_1^2}{R}$$

که همان نتیجه قبل است. همچنین

$$\phi_{12} = B_1 A, \quad \psi_{12} = N_2 \phi_{12}$$

$$L_{12} = \frac{\psi_{12}}{I_1} = \frac{\mu N_1 N_2 A}{\ell} \Rightarrow L_{12} = \frac{N_1 N_2}{\ell}$$

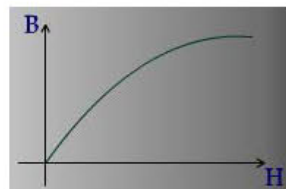
و چنانچه $I_1 = 0$ باشد:

$$L_{22} = \frac{N_2^2}{R}, \quad L_{21} = \frac{N_1 N_2}{R} = L_{12}$$

ملاحظه می شود که خود القاء و القاء متقابل صرفاً وابسته به مشخصات فیزیکی قطعات هستند و مستقل از پارمترهای الکتریکی و میدانی مغناطیسی که مشابه ظرفیت یک خازن است.

انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی

همانگونه که مشخص شد با اعمال جریان به یک مدار (سیم پیچ) ایجاد میدانی مغناطیسی به چگالی فلوی مغناطیسی $\vec{B}$ می نماید در واقع اعمال I ایجاد $\vec{H}$ و آن به نوبه خود $\vec{B}$ را بوجود می آورد ارتباط B به H از طریق منحنی مربوطه مشخص می شود.



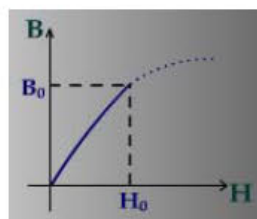
این منحنی در مقادیر بزرگ جریان به حالت اشباع می رود. شیب منحنی $\frac{dB}{dH}$ ضریب نفوذ پذیری را نتیجه خواهد داد که در مقادیر کم B و H رابطه خطی دارند و شیب ثابت است.

در اثر تغییر جریان نسبت به زمان ، ولتاژی القاء می شود که از رابطه قانون فارادی بدست می آید:

$$e = -\frac{d\psi}{dt}$$

می دانیم که:

ℓ



$$w_m = \int_0^{B_0} H dB = \int_0^{B_0} \frac{B}{\mu} dB$$

$$w_m = \frac{1}{2\mu} B_0^2$$

$$w_m = \int_0^{H_0} \mu H dH = \frac{1}{2} \mu H_0^2 = \frac{1}{2} B_0 H_0$$

برای مقدار B و H در ناحیه خطی $w_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$

$$W_m = \int_V w_m dv = \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \cdot \vec{H} dv'$$

و کل انرژی

رابطه دیگر:

$$\psi = LI$$

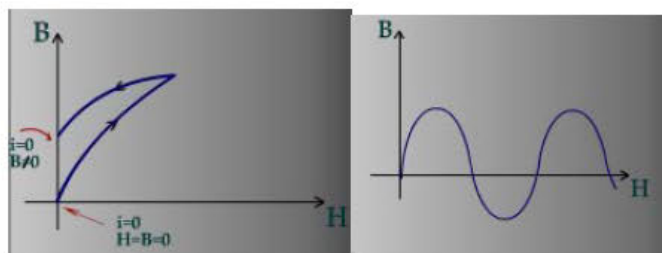
$$W_m = \int p dt = \int V I dt = \int \frac{d\psi}{dt} I dt = \int \frac{d(LI)}{dt} I dt$$

$$W_m = \int L I dI \Rightarrow W_m = \frac{1}{2} L I^2$$

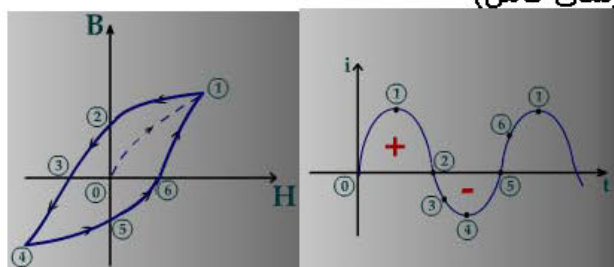
که شکل پارامتری مداری W_m است.

منحنی پسماند مغناطیسی Hysteresis

چنانچه جریان اعمالی به یک سیم پیچ را از مقدار صفر افزایش دهیم و به مقدار مشخصی برسانیم و سپس جریان را کاهش دهیم، مسیر تغییر B نسبت به H در دو مرحله فوق یکی نمی باشد علت این موضوع پسماند مغناطیسی است که در سیستم (هسته مغناطیسی) بوجود می آید.



چنانچه این روند را ادامه دهیم بدین معنا که i در جهت منفی افزایش یابد (مشابه نیم سیکل منفی یک جریان سینوسی کامل)



و زمانهای مختلف را مطابق منحنی جریان ا دنیال کنیم به حلقه ای می رسمیم که در سیکلهای بعدی تکرار می شود.

می توان ثابت کرد که مساحت این حلقه برابر است با میزان انرژی تلف شده در واحد حجم هسته در واحد زمان. این تلفات، تلفات هستریس گویند. و این حلقه را حلقه هیستریس گویند. Hysteresis loop

نیروی میدان مغناطیسی

در این قسمت بدنیال محاسبه نیروی خواهیم بود که در اثر یک تغییر مکان مجازی قابل محاسبه خواهد بود. محاسبه این نیرو از طریق تغییرات انرژی تعیین می گردد.

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{L}$$

چنانچه سیستم بسته باشد بایستی

$$\Delta W + \Delta W_m = 0$$

بنابراین

$$\Delta W = -\Delta W_m = \vec{F} \cdot \Delta \vec{\ell} = F \Delta \ell$$

($\Delta \ell$ تغییر مکان مجازی است)

و یا عبارتی در تغییرات جزئی طول

$$F = -\frac{\Delta W_m}{\Delta \ell} = -\frac{dW_m}{d\ell}$$

بنابراین

$$\vec{F}|_{\phi=\text{ثابت}} = -\nabla W_m$$

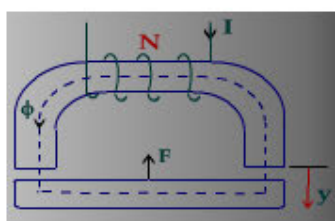
چنانچه مدار (سیستم) به منبع متصل باشد و یا عبارتی سیستم باز باشد، هر گونه تغییر در انرژی می تواند از طریق منبع جریان متصل به مدار تأمین شود بنحویکه I ثابت بماند.

$$\Delta W = \Delta W_m$$

یعنی

$$\vec{F}|_{I=\text{ثابت}} = +\nabla W_m$$

مثال: در مدار سیستم الکترومکانیکی نشان داده شده شکل که می تواند یک سیستم صنعتی جرثقیل یا کنتاکتور (رله) باشد دارای دو قسمت هسته آهنی و دو فاصله هوایی است چنانچه سیم پیچ آن دارای N دور باشد و جریان I ایجاد فلوی ϕ در مدار مغناطیسی کند مطلوبست محاسبه نیروی بالابر بر روی قسمت متحرک هسته آهنی (قسمت ۱ا شکل هسته ثابت است) S سطح مقطع هسته می باشد.



چنانچه قسمت متحرک هسته دارای جابجائی مجازی بمیزان dy باشد و فلوی ثابت بماند، در اثر تغییر در فاصله هوائی تغییر انرژی ایجاد شده، از طریق تغییر انرژی ذخیره شده مغناطیسی سیستم تأمین می گردد ($\Delta W = -\Delta W_m$)

تغییر انرژی مغناطیسی در دو فاصله هوائی عبارتند از:

$$dW = -dW_m = -2 \times \left(\frac{1}{2} \frac{B_0^2}{\mu_0} \right) S dy$$

بنابراین

$$\vec{F} = -\nabla W_m = -\hat{a}_y \frac{B_0^2 S}{\mu_0} = -\hat{a}_y \frac{\phi_0^2}{\mu_0 S}$$

اگر در این مثال سیستم به یک منبع جریان ثابت I متصل می گردید، نیروی وارد بر قسمت متحرک هسته را بصورت زیر می توان بدست آورد.

در اثر جابجایی مجازی dy سبب تغییر فلوی بمیزان $d\phi$ و تغییر مقاومت مغناطیسی به اندازه dR می شود.

اما از طرفی

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 \Rightarrow dW_m = \frac{1}{2} I^2 dL$$

$$\phi = \frac{NI}{R}$$

$$R = R_i + R_g$$

$$R_g = 2 \times \frac{y}{\mu_0 S}$$

$$\phi = \frac{NI}{R_i + 2y/\mu_0 S}$$

بنابراین

تغییرات R را می توان در L ملاحظه نمود:

$$L = \frac{N\phi}{I} = \frac{N^2}{R_i + 2y/\mu_0 S}$$

$$dL = N^2 \frac{-2 dy/\mu_0 S}{\left(R_i + 2y/\mu_0 S\right)^2} = -\frac{2N^2 dy}{\mu_0 S \left(R_i + 2y/\mu_0 S\right)^2}$$

$$dW_m = \frac{1}{2} \frac{-2N^2 I^2 dy}{\mu_0 S \left(R_i + 2y/\mu_0 S\right)^2} = -\frac{1}{\mu_0 S} \left(\frac{NI}{R_i + 2y/\mu_0 S} \right)^2 dy$$

$$dW_m = -\frac{1}{\mu_0 S} \phi_0^2 dy$$

$$\vec{F} = \nabla W_m = -\hat{a}_y \frac{\phi_0^2}{\mu_0 S}$$

که همان نتیجه قبل است.

فصل ششم

Time-varying Fields میدانهای متغیر با زمان

تا کنون میدانهای بررسی شده ساکن بودند یا عبارتی نامتغیر با زمان. میدانهای الکتریکی و مغناطیسی ساکن هیچگونه وابستگی به یکدیگر ندارد اما این موضوع در مورد میدانهایی که تغییرات زمانی دارند صادق نمی باشد. وابستگی متقابل و وجود همزمان میدانهای الکتریکی و مغناطیسی متغیر با زمان اجتناب ناپذیر است.

قانون فاراده Faraday

شاید بتوان گفت که اساس میدانهای متغیر با زمان بر پایه قانون فارادی نهاده شده است. بر طبق این قانون تغییرات زمانی فلوی میدان مغناطیسی ایجاد نیروی محرکه الکتریکی می کند که با عامل بوجود آورنده خود مخالف می کند یا عبارتی:

$$e = -\frac{d\psi}{dt}$$

از طرفی

$$\psi = \int_s \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

تغییرات زمانی ψ می تواند ناشی از تغییرات زمانی $\vec{B}$ (یا عامل اصلی آن i) باشد یا ناشی از تغییرات زمانی سطح s باشد که ψ از آن عبور می کند و یا تغییرات توأم هر دو $(S, \vec{B})$

$$e = emf = \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

در حالت اول

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

و یا (شکل انتگرالی قانون فارادی)

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

$$\int_s \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

$$\int_s \left(\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

قانون اول ماکسول (شکل دیفرانسیلی قانون فارادی)

یعنی تغییرات زمانی میدان مغناطیسی، ایجاد میدان الکتریکی می کند.

در حالت دوم: سطح ds دارای تغییرات زمانی باشد.یعنی اگر قطعه $d\vec{\ell}$ در مدت dt با سرعت $\vec{V}$ در میدان $\vec{B}$ حرکت کند:

$$d\vec{s} = \vec{V} dt \times d\vec{\ell}$$

میزان فلوئی که از این سطح در مدت dt می گذرد:

$$d\psi = \int_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint_c \vec{B} \cdot (\vec{V} dt \times d\vec{l})$$

یا به عبارتی

$$e = -\frac{d\psi}{dt} = -\oint_c \vec{B} \cdot (\vec{V} \times d\vec{l}) = \oint_c \vec{B} \cdot (d\vec{l} \times \vec{V})$$

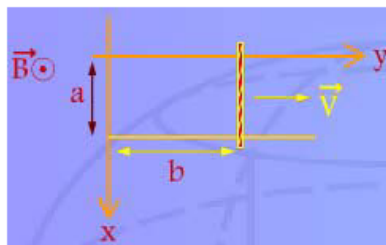
طبق روابط برداری:

$$e = \oint_c (\vec{V} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

و یا بطور کلی (ترکیب دو حالت)

$$e = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} + \oint_c (\vec{V} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

مثال: محاسبه ولتاژ القایی در مداری که در میدان مغناطیسی متغیر با زمان قرار دارد و قسمتی از آن با سرعت $\vec{V} = v_0 \hat{a}_y$ حرکت می کند. $\vec{B} = \hat{a}_z B_0 \cos \alpha t$



$$d\vec{s} = \hat{a}_z dx dy, \quad d\vec{l} = dx \hat{a}_x$$

$$\begin{aligned} e &= -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} + \oint_c \vec{V} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} \\ &= -\int_s (-\hat{a}_z B_0 \omega \sin \alpha t) \cdot (\hat{a}_z dx dy) + \int_a^0 v_0 \hat{a}_y \times \hat{a}_z B_0 \cos \alpha t \cdot dx \hat{a}_x \\ &= B_0 \omega a b \sin(\alpha t) - a v_0 B_0 \cos \alpha t \end{aligned}$$

جریان جابجایی Displacement current

در میدان الکتریکی ساکن از تغییرات زمانی صرف نظر شد و حالت ماندگار را در نظر گرفتیم

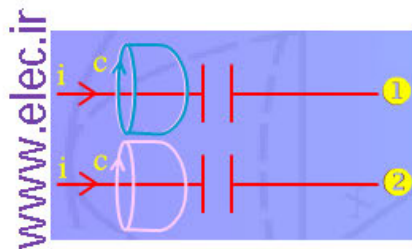
$$\nabla \cdot \vec{J} = 0$$

اما می دانیم که (اصل بقا بار الکتریکی)

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

از طرفی می دانیم $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$

برای یک سیستم (مدار) خازنی که جریان i از مدار می گذرد



برای سیستم ۱

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{total} \Rightarrow H 2\pi r = 0 \Rightarrow H = 0$$

برای سیستم ۲

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{total} \Rightarrow H 2\pi r = i \Rightarrow H = \frac{i}{2\pi r}$$

برای رفع تناقض بایستی

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \vec{J}_D$$

که $\vec{J}_D$ نامشخص است اما:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot (\vec{J} + \vec{J}_D)$$

$$0 = \nabla \cdot \vec{J} + \nabla \cdot \vec{J}_D$$

یا عبارتی

$$\nabla \cdot \vec{J}_D = -\nabla \cdot \vec{J} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{D}) = \nabla \cdot \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$$

$$\nabla \cdot \left(\vec{J}_D - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow \vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

یعنی

$$\nabla \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

بدین معنی که تغییرات زمانی میدان الکتریکی، ایجاد میدان مغناطیسی می کند.

معادلات ماکسول

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$