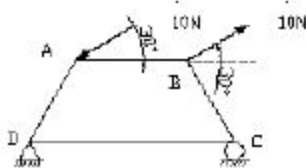


فصل دوم:

استاتیک ذره ها:

نیروهای واقع در صفحه:

نیرونماینده کنش یک جسم بر روی یک جسم دیگر است و به طور کلی بانقطه اثر، بزرگی، اوراستایش مشخص می شود.



جمع بردارها:

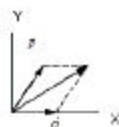


$$\vec{R} = \vec{p} + \vec{q}$$



$$\vec{R} = \vec{p} - \vec{p} = 0$$

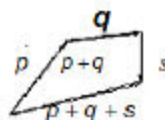
قانون متوازی الاضلاع:



بردار برآیند (برسم بردارها) $\vec{R} = \vec{p} + \vec{q}$ به شیوه سربیه دم و بعد اتصال دم بردار P به سر بردار Q بدست می آید.



مالا جمع بیش از سه بردار در نظر می گیریم.



$$p + q + s = (p + q) + s = p + (q + s)$$

خاصیت شرکت پذیری بردارها:

باتوجه به جمع بردارهای همجهت قبل نتیجه می گیریم:

1. جمع بردارها دارای خاصیت جابجایی است.

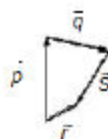
2. جمع بردارها دارای خاصیت شرکت پذیری است.

ضرب اسکالردریک بردار:

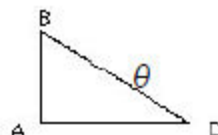
$$p + p = 2p \Rightarrow p_1 + p_2 + \dots + p_n = np$$

$$p_1 = p_2 = \dots = p_n$$

برآیند چندنیروی هم راس:



تجزیه یک نیرو به مولفه های آن:

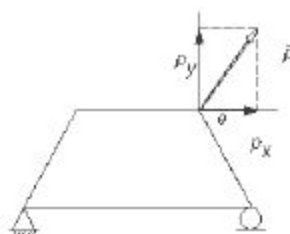


$$\cos \theta = \frac{AC}{BC}$$

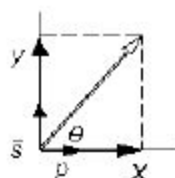
$$\sin \theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan \theta = \frac{AB}{AC}$$

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2}$$



$$p_y = p \sin \theta$$



در امتداد محور x ها و y های مثبت دو بردار واحد اختیار می کنیم به این بردارها بردار یکه می گویند و آنها را به ترتیب بر روی

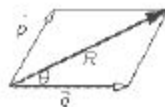
محورهای x و y با نوز نشان می دهند. باتوجه به ضرب یک اسکالردر بردار خواهیم داشت مولفه های قائم P_x, P_y یک

نیروی p را می شود از طریق ضرب بردارهای نوز در اسکالرهای مناسب بدست آورد.

$$P_x = p_x \cdot i, P_y = p_y \cdot j, p = p_x \cdot i + p_y \cdot j$$

$$p_x = p \cos \theta, p_y = p \sin \theta$$

قانون متوازی الاضلاع:



$$\vec{p} = p_x \cdot i + p_y \cdot j$$

$$\vec{q} = q_x \cdot i + q_y \cdot j \Rightarrow \vec{R} + \vec{q} = (p_x \cdot i + p_y \cdot j) + (q_x \cdot i + q_y \cdot j)$$

$$r_x = \sum f_x, r_y = \sum f_y \quad \vec{R} = (p_x + q_x)i + (p_y + q_y)j$$

یادداشت: استفاده از مثلثاتی قواهم داشت:

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \theta$$

طبق قانون سینوسها:

$$\frac{R}{\sin \gamma} = \frac{P}{\sin \alpha} = \frac{Q}{\sin \beta}$$

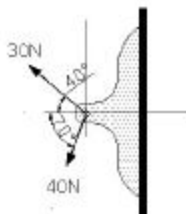


مثال 1:

مطلوبست برآیند دوتیروی 40N, 30N وادیرشکل زیر(با استفاده از: الف) قانون متوازی الاضلاع ب) قانون مثلث

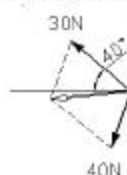
(د) جمع برداری

(الف)



$$R^2 = 30^2 + 40^2 + 2 \times 30 \times 40 \cos 110$$

$$R = 41N$$



(ب)

$$\vec{p} = -30 \cos 40i + 30 \sin 40j = -22.98i + 19.28j$$

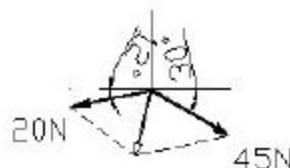
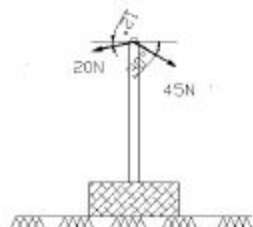
$$\vec{Q} = -40 \cos 70i - 40 \sin 70j = -13.68i - 37.59j$$

$$\vec{R} = \vec{p} + \vec{q} = (-22.98 - 13.68)i + (19.28 - 37.59)j$$

$$\vec{R} = -36.66i + 18.31j, r = \sqrt{36.66^2 + 18.31^2} \approx 41n$$

مثال 2:

دکل AB توسط دو نیروی منظور شده در نقطه A تحت فشار می باشد. مطلوب است تعیین برآیند و جهت آن ناشی از این دو نیرو در نقطه A را.



$$R_x = \sum F_x = 45 \cos 30^\circ - 20 \cos 12^\circ = 38.97i - 19.56i = 19.4i$$

$$R_y = \sum F_y = -45 \sin 30^\circ - 20 \sin 12^\circ = -22.5j - 4.16j = -26.66j$$

$$R = \sqrt{19.4^2 + 26.66^2} = 32.97$$

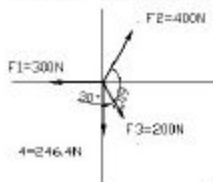
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{19.4}{26.66}\right) = 36.04^\circ$$

روش دوم:

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \theta = 20^2 + 45^2 + 2 \times 20 \times 45 \times \cos 138^\circ = 32.97$$

تعادل یک ذره:

طبق قانون نیوتون در حالتی که تاثیر نیروها صفر است می گویند ذره در حال تعادل است پس می توان گفت وقتی برآیند نیروهای وارد بر یک ذره صفر باشد ذره در حال تعادل است.



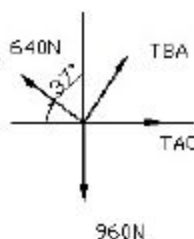
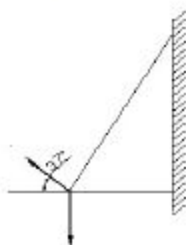
$$R = \sum F = 0 \Rightarrow R = \sum (F_x i + F_y j) = 0 \quad (\sum F_x) i + (\sum F_y) j = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -246.4 + 400 \sin 60^\circ - 200 \cos 30^\circ = 0 \Rightarrow -246.4 + 346.41 - 173.2 = 0$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -300 + 400 \cos 60^\circ + 200 \sin 30^\circ = 0 \Rightarrow -300 + 200 + 100 = 0$$

مثال 3:

در شکل زیر کشش در کابل‌های AB و AC را بدست آورید.



$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{960}{280}\right) = 73.74$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow (T_{AB} \sin 73.74) - 960 + 640 \sin 37 = 0 \Rightarrow 0.96 T_{AB} - 960 + 385.16 = 0$$

$$T_{AB} = \frac{574.84}{0.96} = 598.79 \text{ N}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T_{AC} + 598.79 \cos 73.74^\circ - 640 \cos 37^\circ = 0 \Rightarrow T_{AC} = 343.74 \text{ N}$$

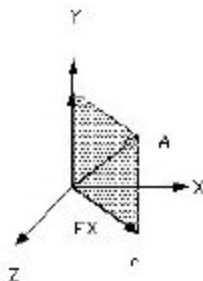
نیروها در فضا:

$$F_x = F \sin \theta_y$$

مؤلفه عمودی

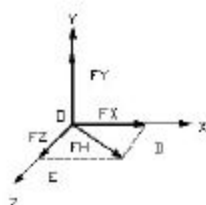
$$F_y = F \cos \theta_y$$

مؤلفه افقی



$$\theta_y = \text{زاویه نیروی } F \text{ با محور } y$$

$$\alpha = \text{زاویه صفحه قائم ABC با صفحه } xy$$



$$F_x = F_h \cos \theta = F \sin \theta_y \cos \theta$$

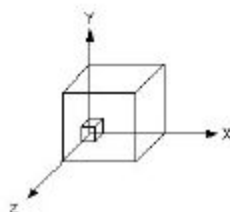
$$F_z = F_h \sin \theta = F \sin \theta_y \sin \theta$$

طبق قانون فیثاغورث:

$$F^2 = (OA)^2 = (OC)^2 + (OB)^2 = F_h^2 + F_y^2$$

$$F_h^2 = (OC)^2 = (OD)^2 + (OE)^2 = F_x^2 + F_z^2$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$



$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z \quad (1)$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

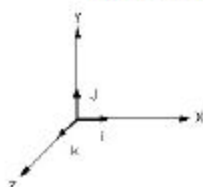
$$F_x = F \cos \theta_x$$

$$F_y = F \cos \theta_y \quad (2)$$

$$F_z = F \cos \theta_z$$

نیروی F را می توان با تعریف بردار یکه های نوزوگانه به ترتیب در امتداد محورهای x و y و z قرار دارند به صورت زیر

بیان کرد.



$$F = F_x \cdot i + F_y \cdot j + F_z \cdot k \quad (3)$$

$$2 \quad (4)$$

$$\Rightarrow F = F(\cos \theta_x \cdot i + \cos \theta_y \cdot j + \cos \theta_z \cdot k)$$

نتیجتاً می توان نیروی F را به صورت ضرب اسکالر F و بردار

(5)

$$\lambda = \cos \theta_x \cdot i + \cos \theta_y \cdot j + \cos \theta_z \cdot k$$

بیان کرد که به λ مولفه یکه بردار F گویند.

(6)

$$\lambda_x = \cos \theta_x$$

$$\lambda_y = \cos \theta_y$$

$$\lambda_z = \cos \theta_z$$

مجموع مربعات مولفه های یک بردار برابر با مربع بزرگی آن است.

$$\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = 1 \quad (7)$$

$$\vec{F} = F \lambda \Rightarrow \cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1$$

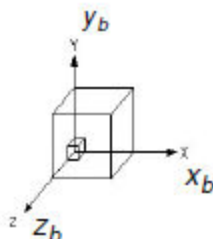
$$\Rightarrow F = \frac{F_x}{\cos \theta_x} = \frac{F_y}{\cos \theta_y} = \frac{F_z}{\cos \theta_z}$$

پیدا کردن بردار واحد امتدادی که از دو نقطه می گذرد.

$$\vec{r}_{B/A} = \overrightarrow{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

$$\lambda_F = \frac{\vec{F}}{|F|}$$

9



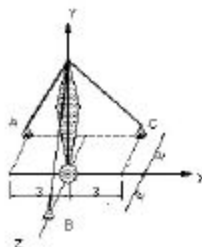
$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$$

مثال 4:

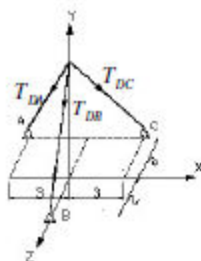
دکل مفابراتی نشان داده شده در شکل زیر به جرم

120kg بوسیله سه کابل مهاری به زمین متصل شده است مطلوب است مماسبه نیروهای کششی در کابلهای

مذکور را.



$$\begin{array}{l|l} 3 & 0 \\ A & 0 \\ -2 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{l|l} 0 & 3 \\ B & 0 \\ 2 & -2 \end{array} \quad \begin{array}{l|l} 3 & 0 \\ C & 6 \\ -2 & 0 \end{array}$$



دیاکرام آزاد جسم

$$W = m \cdot g = 120 \times 10 = 1200N$$

$$\overrightarrow{AD} = (x_D - x_A)\vec{i} + (y_D - y_A)\vec{j} + (z_D - z_A)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AD} = 3\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$|AD| = \sqrt{3^2 + 6^2 + 2^2} = \sqrt{49} = 7$$

$$\vec{\lambda}_{AD} = \frac{\overrightarrow{AD}}{|AD|} = \frac{3}{7}\vec{i} + \frac{6}{7}\vec{j} + \frac{2}{7}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{BD} = 4\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$|BD| = \sqrt{40}$$

$$\vec{\lambda}_{BD} = \frac{\overrightarrow{BD}}{|BD|} = \frac{6}{\sqrt{40}}\vec{j} - \frac{2}{\sqrt{40}}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{CD} = -3\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$|CD| = 7$$

$$\vec{\lambda}_{CD} = -\frac{3}{7}\vec{i} + \frac{6}{7}\vec{j} + \frac{2}{7}\vec{k}$$

$$\vec{F}_{AD} = F_{AD} \cdot \vec{\lambda}_{AD} = F_{AD} \left(\frac{3}{7}\vec{i} + \frac{6}{7}\vec{j} + \frac{2}{7}\vec{k} \right)$$

$$\vec{F}_{CD} = F_{CD} \cdot \vec{\lambda}_{CD} = F_{CD} \left(-\frac{3}{7}\vec{i} + \frac{6}{7}\vec{j} + \frac{2}{7}\vec{k} \right)$$

$$\vec{F}_{BD} = F_{BD} \cdot \vec{\lambda}_{BD} = F_{BD} \left(\frac{6}{\sqrt{40}}\vec{j} - \frac{2}{\sqrt{40}}\vec{k} \right)$$

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow \quad \Sigma F_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$\Sigma F_z = 0$$

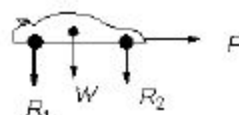
فصل سوم

اجسام صلب:

نیروهایی که به اجسام صلب وارد میشوند دو دسته اند:

(الف) نیروهای خارجی: نماینده تاثیر سایر اجسام بر روی جسم صلب هستند و این نیروها رفتار خارجی جسم صلب را توصیف میکنند.

(ب) نیروهای داخلی: نیروهایی هستند که ذرات تشکیل دهنده جسم صلب را در کنار هم نگه می دارند.



ضرب بردارها:

(الف) ضرب برداری دو بردار و ضرب خارجی

فواصل حاصلضرب برداری دو بردار P و Q که یک بردار U است به قرار زیر است:

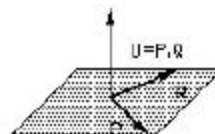
(1) بردار حاصلضرب لایبر صفحه P و Q عمود می باشد که جهت آن با استفاده از قانون دست راست بدست می آید بدین صورت که چهار انگشت در امتداد بردار اول (بردار P) و جهت بسته شدن انگشتان درجهت بردار دیگر بردار (Q) می باشد جهت انگشت شصت جهت بردار U می باشد

(مقدار حاصلضرب برابر است با مقدار عددی P و Q در سینوس زاویه بین آن دو

$$U = PQ \sin \theta$$

$$U = 0 \leftarrow P = Q$$

P و Q موازی یا در راستای هم



(1) قانون جابجایی در مورد ضرب خارجی صادق نیست

$$Q \times P = -(P \times Q)$$

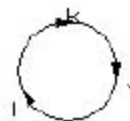
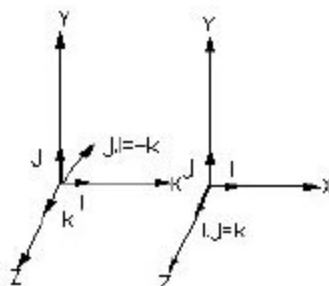
زاویه بین P و Q در جهت مثلثاتی باید باشد

$$Q = Q \times P \quad \text{بر روی } P \text{ بیفتد} \quad , \quad P = P \times Q \quad \text{بر روی } Q \text{ بیفتد}$$

2) خاصیت توزیع پذیری در مورد ضرب خارجی صادق است

$$P \times (Q_1 + Q_2) = P \times Q_1 + P \times Q_2$$

حاصلضرب برداری بر حسب مولفه های قائم



$$\vec{A} \times \vec{A} = 0$$

$$i \times i = 0$$

$$i \times j = k$$

$$i \times k = -j$$

$$j \times i = -k$$

$$j \times j = 0$$

$$j \times k = i$$

$$k \times i = j$$

$$k \times j = -i$$

$$k \times k = 0$$

$$\vec{P} = (P_x i + P_y j + P_z k), \vec{Q} = (Q_x i + Q_y j + Q_z k)$$

$$\vec{P} \times \vec{Q} = (P_x i + P_y j + P_z k) \times (Q_x i + Q_y j + Q_z k)$$

$$= P_x (Q_x i \times i + Q_y i \times j + Q_z i \times k) = P_x Q_y k - P_x Q_z j$$

$$= P_y (Q_x j \times i + Q_y j \times j + Q_z j \times k) = -P_y Q_x k + Q_y Q_z i$$

$$= P_z (Q_x k \times i + Q_y k \times j + Q_z k \times k) = P_z Q_x j + P_z Q_y i$$

$$\vec{P} \times \vec{Q} = (P_y Q_z - P_z Q_y) i - (P_x Q_z - P_z Q_x) j + (P_x Q_y - P_y Q_x) k$$

اگر به رابطه قبل نگاه کنیم می بینیم که جمله های طرف راست آن نماینده بسط یک دترمینان هست پس حاصلضرب (ii) را می توانیم به صورت زیر بیان کنیم که راحت تر به خاطر سپرده شود.

$$U = \begin{vmatrix} i & j & k \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} = (P_y Q_z - P_z Q_y)i - (P_x Q_z - P_z Q_x)j + (P_x Q_y - P_y Q_x)k$$

ضرب عددی دو بردار و ضرب داخلی:

مقصود از ضرب عددی بردار $\vec{P}$ در بردار $\vec{Q}$ که با هم زاویه θ ساخته اند تعیین عددی است که مقدار آن برابر $U = \vec{P} \times \vec{Q}$ باشد.

$$U = P Q \cos \theta$$

وقتی گفته می شود بردار $\vec{Q}$ را روی $\vec{P}$ تصویر کنید یعنی ضرب داخلی

$$U = \vec{A} \cdot \vec{A} = A \cdot A \cos \theta = A^2$$

از تعریف ضرب داخلی دو بردار نتیجه می شود که بردارهای $\vec{P}$ و $\vec{Q}$ در صورتیکه حاصلضرب داخلی شان برابر با صفر گردد متعامد می باشند $\vec{P} \cdot \vec{Q} = 0 \Rightarrow \vec{P} \perp \vec{Q}$

به عنوان مثال کار دو بردار هستند که بر هم عمودند (اف و د)

$$i \cdot i = 1$$

$$i \cdot j = 0$$

$$i \cdot k = 0$$

$$j \cdot i = 0$$

$$j \cdot j = 1$$

$$j \cdot k = 0$$

$$k \cdot i = 0$$

$$k \cdot j = 0$$

$$k \cdot k = 1$$

حاصلضرب بردارهای یکه یا صفر است یا یک

$$\vec{P} = P_x i + P_y j + P_z k$$

$$\vec{Q} = Q_x i + Q_y j + Q_z k$$

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = (P_x i + P_y j + P_z k) \cdot (Q_x i + Q_y j + Q_z k)$$

$$= (P_x Q_x i \cdot i + P_x Q_y i \cdot j + P_x Q_z i \cdot k)$$

$$+ (P_y Q_x j \cdot i + P_y Q_y j \cdot j + P_y Q_z j \cdot k)$$

$$+ (P_z Q_x k \cdot i + P_z Q_y k \cdot j + P_z Q_z k \cdot k) = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z$$

تعیین زاویه بین دو بردار:

$$\begin{aligned}\vec{P} \cdot \vec{Q} &= PQ \cos \theta = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z \Rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{P} \cdot \vec{Q}}{PQ} \\ \frac{P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z}{PQ} &= \frac{P_x}{PQ} \cdot \frac{Q_x}{PQ} + \frac{P_y}{PQ} \cdot \frac{Q_y}{PQ} + \dots = \cos \theta \\ \frac{P_x}{PQ} &= L_1 \quad \frac{Q_x}{PQ} = L_2 \\ \Rightarrow \cos \theta &= L_1 L_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2\end{aligned}$$

که در آن L_1, m_1, n_1 کسینوس هادیهای (شیب) بردارها هستند. همچنین مشاهده می کرد که هر دو بار در صورتیکه کسینوس هادی آنها در رابطه زیر صدق کنند متعامد می باشند.

$$L_1 L_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$$

خواص ضرب داخلی بردارها:

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = \vec{Q} \cdot \vec{P}$$

(1) قانون جابجایی صادق است

$$\vec{P} \cdot (\vec{Q} + \vec{R}) = \vec{P} \cdot \vec{Q} + \vec{P} \cdot \vec{R}$$

(2) قانون توزیع پذیری صادق است

مثال:

دو بردار $\vec{A} = 10\vec{i} + 20\vec{j} + 3\vec{k}$ و $\vec{B} = -10\vec{j} + 12\vec{k}$ مفروضند.

(الف) حاصلضرب داخلی دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را محاسبه نمایید.

(ب) زاویه بین دو بردار

(ج) تصویر بردار $\vec{A}$ روی امتداد بردار $\vec{B}$

(د) بردار تصویر $\vec{A}$ روی امتداد بردار $\vec{B}$

$$U = \vec{A} \cdot \vec{B} = (10\vec{i} + 20\vec{j} + 3\vec{k}) \cdot (-10\vec{j} + 12\vec{k}) = (10 \times 0) + (20) \cdot (-10) + (3) \cdot (12) = -164$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{10^2 + 20^2 + 3^2} = 22.56$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{(-10)^2 + (12)^2} = 15.62$$

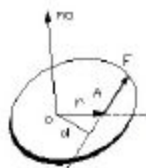
$$U = AB \cos \theta \Rightarrow -164 = 22.56 \times 15.62 \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{-164}{22.56 \times 15.62} \Rightarrow \theta = 117.7^\circ$$

$$\vec{C} = A \cos \theta = 22.56 \cos 117.7 = -10.46$$

$$\vec{A} = \frac{\vec{B}}{B} \cdot \frac{10\vec{j} + 12\vec{k}}{15.62} \Rightarrow \vec{C} = C_n = -10.46 \left(\frac{10\vec{j} + 12\vec{k}}{15.62} \right) = -6.7\vec{j} - 8\vec{k}$$

گشتاور یک نیرو حول نقطه:

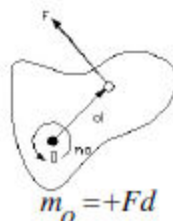
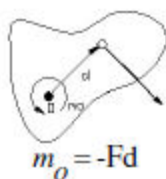
فرض کنیم نیروی F بر یک جسم صلب اثر کند این نیرو با بردار نشان داده میشود. مکان A را می شود با بردار r (که نقطه ثابت مرجع O) را به A متصل می کند مشخص کرد که به آن بردار مکان A گویند.



حال می خواهیم گشتاور نیروی F را حول O به صورت ضرب برداری F و r تعریف کنیم.

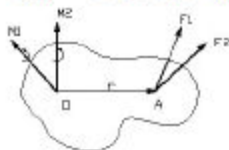
$$M_o = r \times F = rF \sin \theta = Fr \sin \theta = Fd$$

که d فاصله عمودی O تا خط اثر F می باشد. نیروی F علاوه بر آنکه در جسم تمایل به حرکت در امتداد خط اثر نیرو ایجاد می کند این کرایش را گشتاور M نیرو حول محور داده شده نامند. در سیستم یکاهای (SI) نیرو بر حسب نیوتن و فاصله بر حسب متر (m) بیان می شود. گشتاور نیرو بر حسب نیوتن-متر (N.M) بیان می شود.



قضیه وارینغون و یا اصل گشتاور:

برای نیرو هایی که در یک صفحه واقعند بدین صورت بیان می شوند که گشتاور یک نیرو حول هر نقطه برابر حاصل جمع گشتاور های مولفه های نیرو حول همان نقطه می باشد.

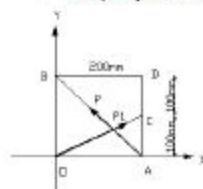


$$m_1 + m_2 = r \times F_1 + r \times F_2$$

$$m = r \times (F_1 + F_2)$$

مثال:

نیروی $P = 10\text{N}$ در امتداد دو نقطه A و B مربعی به اضلاع 200mm اعمال شده است. مطلوبست محاسبه مؤلفه P' از نیروی P در امتداد OC با جهت مثبت از O به طرف C



کسینوسهای بردار $\vec{OC}$:

$$O = \begin{vmatrix} 0 \rightarrow x \\ 0 \rightarrow y \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{vmatrix}$$

$$OC = (0.2 - 0)i + (0.1 - 0)j$$

$$L = \frac{0.2}{\sqrt{0.04 + 0.01}} = \frac{0.2}{\sqrt{0.05}} = 0.894$$

$$m = \frac{0.1}{\sqrt{0.05}} = 0.447$$

9

$$n_{OC} = 0.894i + 0.447j$$

کسینوسهای بردار $\vec{AB}$:

$$A = \begin{vmatrix} 0.2 \\ 0 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 0 \\ 0.2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{AB} = (0 - 0.2)i + (0.2 - 0)j$$

$$\alpha = \frac{-0.2}{\sqrt{0.04 + 0.04}} = \frac{-0.2}{\sqrt{0.08}} = -0.707$$

$$B = \frac{0.2}{\sqrt{0.08}} = 0.707$$

$$n_{AB} = (-0.707i + 0.707j)$$

$$F_{AB} = F \cdot n_{AB} = 10 \times (-0.707i + 0.707j) = -7.07i + 7.07j$$

$$F_{OC} = F_{AB} \cdot n_{OC} = (-7.07i + 7.07j) \cdot (0.894i + 0.447j) \\ = (-7.07 \times 0.894 + 7.07 \times 0.447) = -3.16\text{N}$$

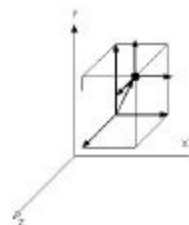
مواضع های قائم گشتاور در یک نیرو:

اگر نقطه B بر مبدأ منطبق باشد:

$$m_O = r \times F$$

$$r = xi + yj + zk$$

$$F = F_x \cdot i + F_y \cdot j + F_z \cdot k$$



با جایگذاری در رابطه داریم:

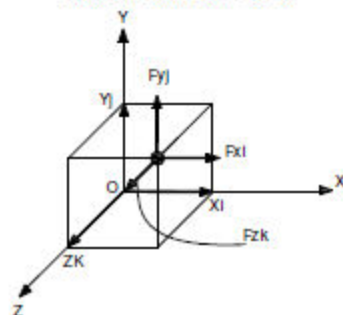
$$m_O = m_x \cdot j + m_y \cdot j + m_z \cdot k$$

$$m_x = yF_z - zF_y$$

$$m_y = zF_x - xF_z$$

$$m_z = xF_y - yF_x$$

$$m_B = r \frac{A}{B} \times F = (r_A - r_B) \times F$$



$$m_B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$m_o = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

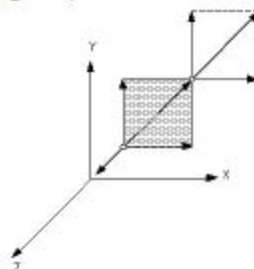
$$x_{A/B} = x_A - x_B$$

$$y_{A/B} = y_A - y_B$$

$$z_{A/B} = z_A - z_B$$

در مسائل دو بعدی $z, F_z = 0$

$$m_o = (xF_y - yF_x)k$$

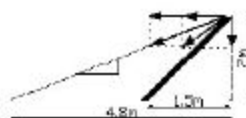
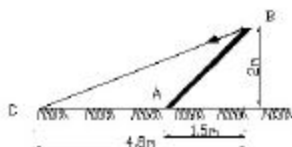


مثبت بودن m_0 مایک از آن است که بردار m_0 به طرف خارج از صفحه کتاب است (تمایل به چرخاندن جسم حول m_0 در جهت پادساعتگرد دارد)

$$M_B = (x_A - x_B)F_y - (y_A - y_B)F_x$$

مثال:

مطلوبست گشتاور نیروی $260N$ حول نقطه A را
الف) بوسیله تجزیه نیروی محوری x و y وارد بر نقطه B
ب) بوسیله تجزیه نیروی محوری x و y در نقطه C



$$F_x = \frac{12}{13}(260) = 240N$$

$$F_y = \frac{5}{13}(260) = 100N$$

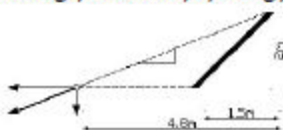
$$M_A = F_x \times 2 - F_y \times 1.5 = 240 \times 2 - 100 \times 1.5 = 330N.M$$

ابتدا نیروی $260N$ را در امتداد خط اثرش امتداد داده تا نقطه C وارد شود.

$$F_x = \frac{12}{13}(260) = 240N$$

$$F_y = \frac{5}{13}(260) = 100N$$

$$M_A = F_y \times 3.3 + F_x \times 0 = 100 \times 3.3 = 330N.M$$



$$\begin{array}{c|c} C & 0 \\ \hline & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} B & 4.8 \\ \hline & 20 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} A & 3.3 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$F_{BC} = F_{BC} - \lambda_{BC} = 260 \times \frac{48i + 20j}{\sqrt{48^2 + 20^2} = 52} = 240i + 100j$$

$$r_{A/B} = (4.8 - 3.3)i + 2j = 1.5i + 2j$$

$$m_A = F \times r = (240i + 100j)(1.5i + 2j) = 240 \times 2k - 100 \times 1.5k = 330N$$

ضرب سه گانه مختلط سه بردار:

ماتریکس داخلی سه بردار:

ضرب سه گانه مختلط عبارت است از ماتریکس داخلی دو بردار که یکی از آن دو توسط ماتریکس خارجی دو بردار دیگر بیان شده باشد. این ماتریکس که کمیتی عددی می باشد توسط هر یک از روابط معادل زیر قابل بیان است:

$$(P \times Q) \cdot R = R \cdot (P \times Q) = -R \cdot (Q \times P)$$

در حقیقت رعایت پراانتز هادر عبارت فوق الذکر لازم نمی باشد چون نوشتن ماتریکس صورت $P \times (Q \cdot R)$ بدون مفهوم است همچنین میتوان ثابت کرد که:

$$P \times Q \cdot R = P \cdot Q \times R$$

که قانون جابجایی نقطه و ضرب را در ماتریکس سه بردار بدون اینکه تغییری در نتیجه عددی ماتریکس حاصل

$$P \times Q \cdot R = \begin{vmatrix} P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix}$$

شود مشخص میکند. بعلاوه میتوان با استفاده از بسط دادن نشان داد که:

ماتریکس خارجی سه بردار:

عبارت است از ماتریکس خارجی دو بردار که یکی از آن دو توسط ماتریکس خارجی دو بردار دیگر بیان شده باشد حاصل یک بردار بوده و توسط یکی از عبارت معادل زیر بیان می شود.

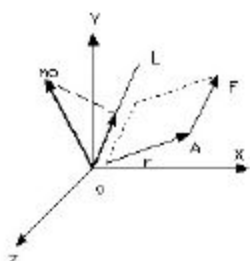
در اینجا وجود پراانتز ضرورت دارد زیرا در رابطه ای مانند $P \times Q \times R$ به علت نا مشخص بودن اینکه کدام دو بردار در هم ضرب شده اند مبهم است. می توان ثابت کرد که ماتریکس سه گانه خارجی معادل عبارت زیر است:

$$(P \times Q) \times R = R \cdot P \cdot Q - R \cdot Q \cdot P$$

$$P \times (Q \times R) = P \cdot R \cdot Q - P \cdot Q \cdot R$$

گشتاور یک نیرو حول یک محور:

گشتاور نیروی F حول نقطه O برابر m_{OL} می باشد حال اگر محور OL را در نظر بگیریم گشتاور m_{OL} نیروی F حول محور OL را به صورت تصویر گشتاور m_{OL} نیروی F بر آن تعریف می کنیم.



اگر بردار L در امتداد OL با λ نشان دهیم خواهیم داشت.

$$m_{OL} = \lambda \cdot m_O = \lambda \cdot (r \times F)$$

گشتاور یک نیرو تصویر یک بردار بر روی یک محور

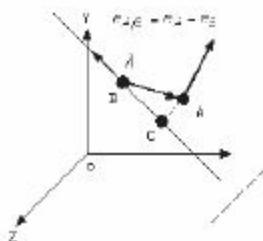
که گشتاور نیروی F حول OL (اسکالر) است و از ضرب سه کانه مطلق سه بردار F, r, λ بدست می آید و یا:

$$m_{OL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z = \text{کسینوسهای بردار } OL$$

$$x, y, z = \text{مختصات نقطه اثر نیروی } F$$

$$F_x, F_y, F_z = \text{مؤلفه های نیروی } F$$



$$m_{BL} = \lambda \cdot m_B = \lambda \cdot (r_{A/B} \times F)$$

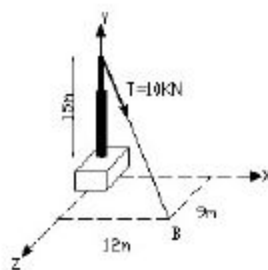
$$r_{A/B} = r_A - r_B$$

نماینده برداری است که از B به A رسم می شود.

$$m_{BL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

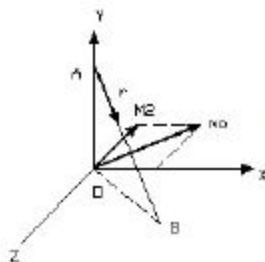
مثال:

کابلی که انتهای فوقانی یک دیرک صلب نقطه A را به نقطه B متصل می کند تحت کشش $T=10\text{KN}$ می باشد. مطلوب است کششاور M_z نیروی T حول محور Z ها مابین پایه دیرک می باشد.



$$\begin{array}{c|c} 0 & 12 \\ \hline A & 15 \\ \hline 0 & 9 \end{array}$$

بردار M_O عمود بر صفحه ای است که T و نقطه O را در بر می گیرد.



$$m_z = m_o \cdot k = (-15 \times 5.66k + 4.24i) \cdot kz = -84.9 \text{ KN.m}$$

$$\vec{r} = 15j(m)$$

$$n = \frac{\vec{AB}}{AB} = \frac{(12-0)i + (0-15)j + (9-0)k}{\sqrt{12^2 + 15^2 + 9^2}} = 0.566i - 0.707j + 0.424k$$

$$\vec{T} = 10n = 5.66i - 7.07j + 4.24k$$

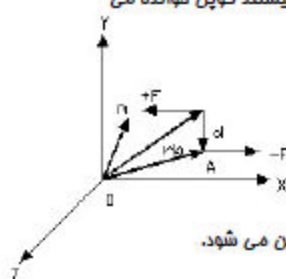
$$m_o = \vec{r} \times \vec{T} = (15j) \times (5.66i - 7.07j + 4.24k)$$

$$= (-15 \times 5.66k + 15 \times 4.24i)$$

علامت منفی معبر آن است که M_z در خلاف جهت محور Z ها عمل می کند.

کویل یا زوج نیرو:

کشتاور ماصل از دو نیروی مساوی و موازی و مختلف الجهت که در امتداد یک خط واقع نیستند کویل خوانده می شود.

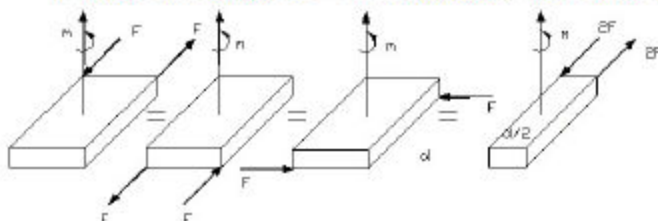


$$\begin{aligned} m &= R_A \times (-F) + r_B \times F = (-r_A + r_B) \times F \\ r &= (-r_A + r_B) \\ m &= r \times F \\ m &= rF \sin \theta = Fd \end{aligned}$$

که الفاصله عمودی میان خط اثرهای F و $-F$ است. جهت m از روی قاعده دست راست تعیین می شود.

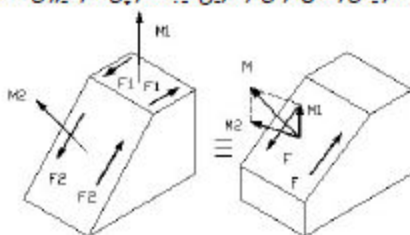
کوپلهای معادل:

با تغییر یا فتن مقادیر F و d یک کویل مفروض مشروط بر آن که حاصلضرب آنها ثابت بماند، تغییری در آن کویل به وجود نخواهد آمد. به همین ترتیب مقدار یک کویل ثابت می ماند بدون توجه به اینکه زوج نیرو در کدامیک از صفحات موازی یکدیگر عمل می نمایند. شکلهای زیر چهار حالت مختلف یک کویل ثابت M را نشان میدهد.



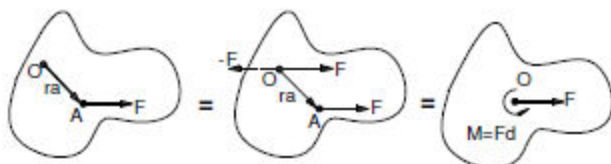
جمع بستن کوپلهای:

کوپلهائی را که در صفحات غیر موازی با یکدیگر عمل می کنند می توان با قانون عادی ترکیب بردارها جمع کرد. مثلاً در شکل (A) کوپل M_1 در اثر نیروهای F_1 و کوپل M_2 در اثر نیروهای F_2 در دو صفحه به صورت نشان داده شده عمل می کنند این دو کوپل را می توان با حاصل جمع بردارشان (M) به صورتی که در شکل (B) نشان داده شده است تعویض کرد. این تعویض را می توان از طریق ایجاد کوپل M از نیروی F که ترکیب برداری F_1 و F_2 می باشد تأیید کرد.



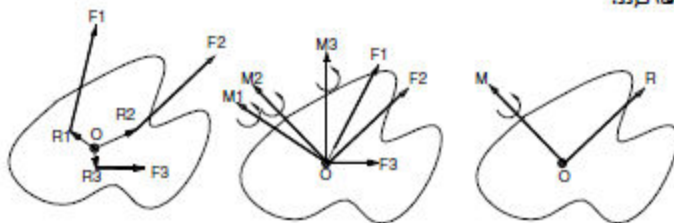
انتقال بردار نیرو:

یک کوپل مشخص و یک نیرو را که در صفا کوپل واقع است را می توان به یک نیروی واحد تبدیل کرد.



برایند مجموعه های نیرو:

در شکل نشان داده شده در زیر هر نیروی F را می توان به موازات خود به نقطه دلخواه O انتقال داد. مشروط به اینکه اندازه نیرو ثابت مانده و یک کوپل Fd که در آن d بازوی گشتاور از O تا موقعیت ابتدایی F می باشد به آن اضافه کرد.



$$R = \Sigma F = F_1 + F_2 + \dots$$

$$M = \Sigma m_1 + m_2 + \dots = \Sigma (r \times F)$$

مجموعه نیروهای متوازی:

واقع است که برآیند نیروهای متوازی دارای مقداری برابر با حاصل جمع عددی مجموعه نیروها می باشد. موقعیت خط اثر برآیند با استفاده از قضیه واریتون به دست می آید. چون گشتاور برآیند حول هر مموری می باید برابر حاصل جمع گشتاورهای مولفه های آن حول همان محور باشد.

$$R = F_1 + F_2 + F_3$$

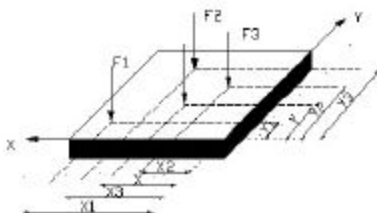
$$\bar{x}_R = F_1x_1 + F_2x_2 + F_3x_3$$

$$\bar{y}_R = F_1y_1 + F_2y_2 + F_3y_3$$

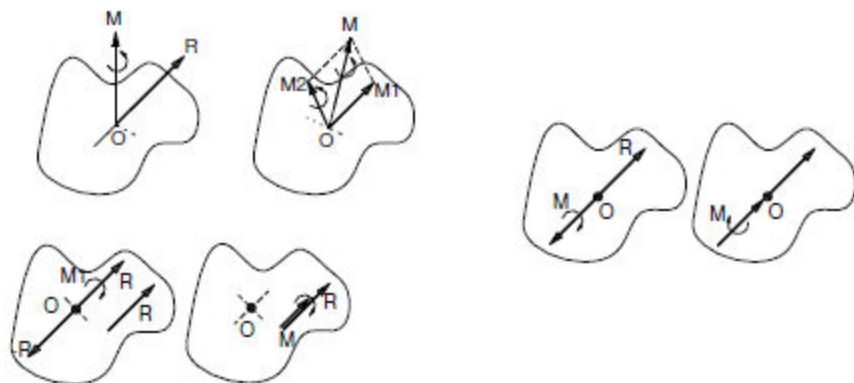
$$R = \sum F$$

$$\bar{x} = \frac{\sum (F_x)}{R}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum (F_y)}{R}$$



برآیند پیچ گشتی وار:



در صورتی که بردار برآیند کوپل ها M به موازات برآیند نیروها باشد. برآیند حاصل برآیند پیچ گشتی وار خوانده میشود. هر مجموعه نیرو را می توان به یک برآیند پیچ گشتی وار که در امتداد خط اثر منحصراً بر فردی عمل می کند تبدیل کرد.